

Modélisation mathématique de l'épidémie de COVID-19: comment ça marche?

Laurent DUMAS

Laboratoire de Mathématiques de Versailles
Université de Versailles Saint Quentin (UVSQ)

Salon Culture et Jeux Mathématiques, le 27 mai 2020

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en 3 dates (5 mars, 5 avril, 5 mai 2020)
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Que donne la modélisation mathématique pour le COVID-19 ?
- 4 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en 3 dates (5 mars, 5 avril, 5 mai 2020)
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Que donne la modélisation mathématique pour le COVID-19 ?
- 4 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Retour au 5 mars 2020



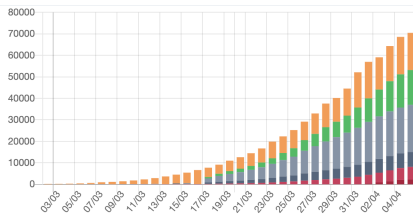
Les Verts en finale de Coupe de France, une première depuis 1982. | PHILIPPE RENAULT/QUEST-FRANCE

Le point sur l'épidémie due au coronavirus : plus de 100 000 cas dans le monde, l'Italie pays le plus touché en Europe

L'Italie a enregistré 49 nouveaux décès en 24 heures, soit 197 morts au total. Le nombre de personnes infectées atteint plus de 4 630.

Le Monde avec AFP - Publié le 06 mars 2020 à 06h43 - Mis à jour le 07 mars 2020 à 07h17

Retour au 5 avril 2020

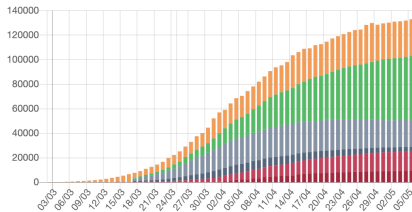


Coronavirus : en Europe, où 47 000 personnes sont mortes, des appels à continuer à respecter le confinement

Les derniers chiffres de la mortalité en Italie, où le bilan total frôle les 16 000 décès, laissent espérer qu'un plateau a été atteint. Aux Etats-Unis, les autorités préparent la population à une période « horrible » et à l'aggravation de la crise sanitaire.

Le Monde avec AFP, AP et Reuters - Publié le 05 avril 2020 à 05h41 - Mis à jour le 06 avril 2020 à 14h50

Retour au 5 mai 2020



Coronavirus : ce qu'il faut retenir de la journée du 5 mai

En France, 330 décès supplémentaires en 24 heures sont à déplorer, mais les hospitalisations sont en forte baisse sur l'ensemble du territoire. Les cinq départements des Hauts-de-France ne sont plus classés « rouges » concernant la circulation du Covid-19 et la tension sur les services hospitaliers.

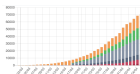
Quelques questions souvent posées à un mathématicien modélisateur pendant la crise du COVID-19

• Au 5 mars :



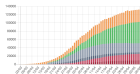
- Quels sont les scénarios possibles ?
- Qu'est ce que l'immunité collective ?

• Au 5 avril :



- Quand aura lieu le pic de l'épidémie ?
- Combien vaut R_0 ?

• Au 5 mai :



- Quel a été l'effet du confinement ?
- Y aura-t-il une deuxième vague ?

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en 3 dates (5 mars, 5 avril, 5 mai 2020)
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Que donne la modélisation mathématique pour le COVID-19 ?
- 4 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Qu'est ce qu'un modèle mathématique ?

- Un modèle mathématique associé à un problème (biologique, physique, économique, sociétal) est une **représentation simplifiée** de celui-ci **sous forme d'équations**.
- Il existe des modèles mathématiques dans de nombreux domaines : météorologie, trafic routier, médecine, etc...
- Un modèle repose sur des **paramètres** qu'il est nécessaire de **fixer avec des données expérimentales**.
- Une fois ses paramètres correctement fixés, le modèle permet de **prédire l'évolution du phénomène étudié** en résolvant les équations associées sur un ordinateur.

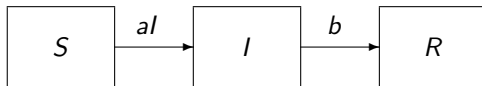
Qu'est ce qu'un modèle mathématique en épidémiologie ?

- En épidémiologie, le modèle a pour objectif de **suivre et de prédire l'évolution d'une épidémie au cours du temps**.
- La plupart des modèles en épidémiologie consiste à **classer l'ensemble de la population en différentes catégories** (ou compartiments) et à **représenter** de manière simplifiée **les échanges** entre ces catégories.
- **Le modèle SIR** est le plus connu et le plus simple de ces modèles. Il a encore été abondamment utilisé sous diverses formes pour modéliser l'épidémie de COVID-19.

Description du modèle SIR

- Le modèle SIR est dû à Kermack et McKendrick et date de 1927.
- L'idée consiste à représenter l'évolution de l'épidémie dans le temps à travers les échanges entre 3 catégories d'individus :
 - les individus susceptibles d'être contaminés (en nombre $S(t)$ à l'instant t).
 - les individus infectés (en nombre $I(t)$).
 - les individus en rémission ou décédés (en nombre $R(t)$)

- On représente schématiquement le modèle sous la forme de compartiments :



- Les compartiments sont reliés entre eux à travers un taux d'échange :
 - aI : où le paramètre a est le taux de transmission
 - b : le paramètre b est le taux de rémission

Ecriture mathématique du modèle SIR

- Le modèle SIR se traduit mathématiquement par un **système d'équations différentielles** reliant les variations temporelles des 3 catégories de populations à leurs valeurs à un instant t :

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t), \\ \frac{dR(t)}{dt} = bI(t). \end{cases}$$

- Ce système est complété par des conditions initiales correspondant aux valeurs initiales de chacune des sous-populations d'individus :

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = N - S_0 - I_0$$

Résolution numérique du modèle SIR

- Ce problème possède alors une unique solution qu'il est possible d'approcher avec un **logiciel de calcul numérique** (Scilab ou Matlab).
- On peut également remarquer mathématiquement qu'on a une conservation du nombre d'individus :

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

- **Le modèle peut être adimensionalisé** en divisant S , I et R par N . On a alors $0 \leq S(t) \leq 1$, $0 \leq I(t) \leq 1$, $0 \leq R(t) \leq 1$ et **$S(t) + I(t) + R(t) = 1$** .
- On dit que l'épidémie se propage si le nombre de personnes infectées augmente à l'instant initial. Cela signifie exactement que :

$$R_0 = \frac{aS_0}{b} > 1$$

- On appelle R_0 le taux de reproduction. Il peut-être vu comme le **nombre moyen qu'une personne infectée va contaminer durant sa période de contagiosité**.

Premières utilisations du modèle SIR

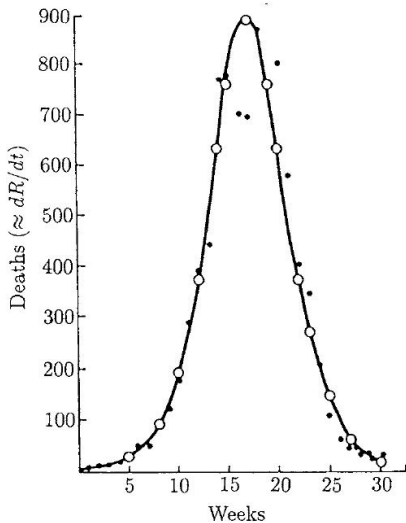


Figure 10.2. Bombay plague epidemic of 1905–1906. Comparison between the data (●) and theory (○) from the (small) epidemic model and where the number of deaths is approximately dR/dt given by (10.16). (After Kermack and McKendrick 1927)

Premières utilisations du modèle SIR

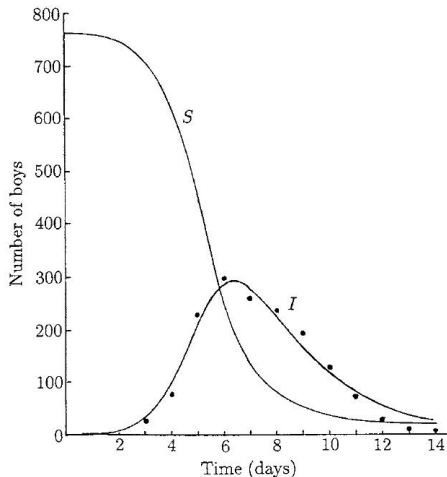
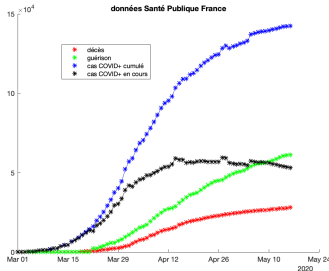


Figure 10.3. Influenza epidemic data (●) for a boys' boarding school as reported in the British medical journal, *The Lancet*, 4th March 1978. The continuous curves for the infectives (I) and susceptibles (S) were obtained from a best fit numerical solution of the SIR system (10.1)–(10.3): parameter values $N = 763$, $S_0 = 762$, $I = 1$, $\rho = 202$, $r = 2.18 \times 10^{-3}/\text{day}$. The conditions for an epidemic to occur, namely, $S_0 > \rho$, are clearly satisfied and the epidemic is severe since R/ρ is not small.

- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en 3 dates (5 mars, 5 avril, 5 mai 2020)
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Que donne la modélisation mathématique pour le COVID-19 ?**
- 4 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Données utilisées pour le COVID-19

- Les données collectées chaque jour pendant l'épidémie et fournies par Santé Publique France vont servir à calculer les paramètres a et b du modèle.



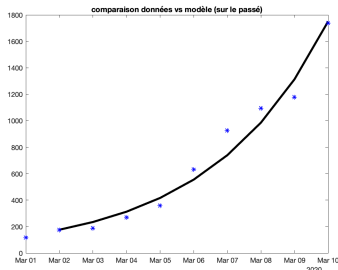
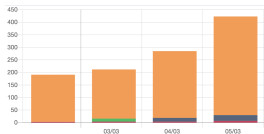
- Jusqu'au début du mois de mai, tous les tests concernent uniquement les personnes ayant développé des symptômes graves.
- La fraction de personnes infectées $I(t)$ du modèle représentera uniquement les individus ayant développé des formes graves.

Hypothèses de modélisation pour l'épidémie de COVID-19

- On suppose tout qu'abord que le virus se propage de manière homogène à l'échelle du pays et que les populations ne se déplacent pas ou peu.
- Afin de faire décroître $R_0 = \frac{aS_0}{b}$, on étudie deux scénarios possibles :
 - **Scénario 1** : on laisse la maladie se propager afin d'atteindre le seuil d'immunité collective en faisant décroître S_0 : dans ce cas, le taux de transmission est supposé constant
 - **Scénario 2** : on cherche à freiner la maladie (fermeture des écoles, confinement, etc...) : dans ce cas le taux de transmission sera supposé décroissant avec le temps : $t \mapsto a(t)$.
- On suppose que le taux de rémission b est constant.
- Autres hypothèses : immunité acquise, non saisonnalité du virus.

Paramètres du modèle SIR pour le COVID-19 (scénario 1)

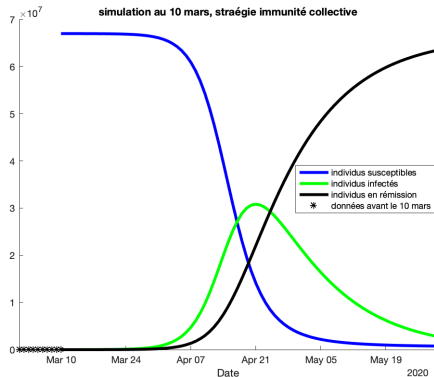
- On se place ici au 10 mars 2020.
- Afin de déterminer les paramètres a et b du modèle, on ajuste l'évolution du modèle SIR et des données sur une fenêtre dans le passé de 8 jours :



- Pour cela, on résout un problème de minimisation pour déterminer a et b .
- Une fois a et b fixés, on peut faire évoluer le modèle dans le futur.

Exemple de prévision au 10 mars (scénario 1)

- Au 10, mars, on trouve $a \simeq 0.364$ et $b \simeq \frac{1}{13}$.
- Cela conduit à une valeur $R0 \simeq \frac{a}{b} = 4.73$ au 10 mars.

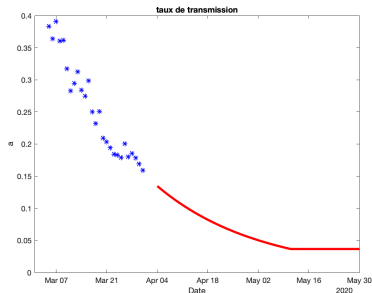


- L'immunité collective est atteinte lorsque $S_0 \frac{a}{b} = 1$ soit $S_0 = \frac{b}{a} \simeq 0.21$.
- Une tel scénario aurait été catastrophique d'un point de vue sanitaire.

Paramètres du modèle SIR pour le COVID-19 (scénario 2)

- On se place ici au 5 avril 2020.
- On suppose ici que le taux de transmission décroît de manière exponentielle jusqu'au 11 mai :

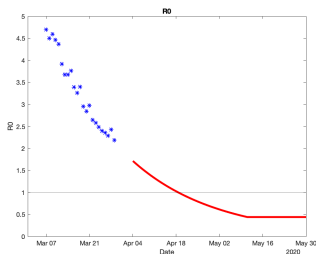
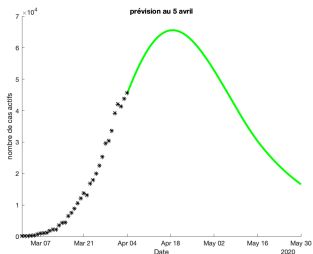
$$a(t) = c \exp(-dt)$$



- Les paramètres c et d deviennent les nouveaux paramètres du modèle qu'il est nécessaire d'ajuster avec le même principe précédent de minimisation.

Exemple de prévision au 5 avril (scénario 2)

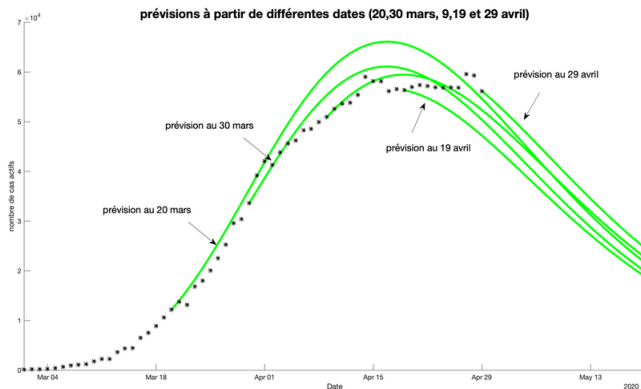
- Sous les nouvelles hypothèses précédentes et à la date du 5 avril, la **prédiction du pic de l'épidémie est correctement prédite** (autour du 15 avril).
- A présent, la décroissance de R_0 sous la valeur 1 à partir de cette date provient de la décroissance du taux de transmission et non de l'obtention d'une immunité collective.



- La valeur de R_0 est estimée autour de 0.5 un mois plus tard (c'est à dire au 5 mai).

Validation du scénario 2

- Le scénario 2 a permis d'obtenir une très bonne prévision de l'épidémie à partir de fin mars et jusqu'à la fin du confinement début mai.

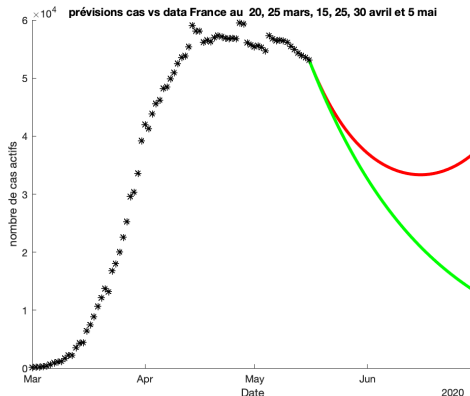


Les prévisions actuelles (au 20 mai)

- Après le confinement, il est très difficile de prédire l'évolution de l'épidémie car **les variations du paramètre a ne sont pas encore établies** (croissance ou non).
- De plus, les **nouvelles stratégies de test** rendent plus difficile l'exploitation des données et la détermination du paramètre b .
- Enfin, **le nombre de personnes immunisées est encore inconnu** en raison de la proportion importante des personnes asymptomatiques.
- Au final, l'évolution du paramètre $R0 = \frac{aS_0}{b}$ est très incertaine.

Exemple de prévisions au 20 mai

- Les deux scénarios
 - Scénario 1 : taux de transmission a constant
 - Scénario 2 : taux de transmission a légèrement croissant
 conduisent à des résultats très différents.



- La sensibilité du modèle par rapport à ses paramètres est très forte

Conclusion

- Dans toutes les périodes de cette crise, les **mathématiques** ont eu une importance essentielle pour **alerter, prédire et anticiper**.
- Il est important cependant de ne pas oublier les **limitations d'un modèle mathématique** liées à ses hypothèses simplificatrices et l'incertitude sur ses paramètres.
- Au final, ce sont toujours les individus qui ont le dernier mot !

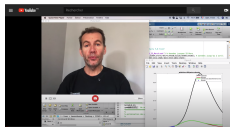
- 1 COVID-19 : petit retour en arrière en 3 dates (5 mars, 5 avril, 5 mai 2020)
- 2 Qu'est ce qu'un modèle mathématique et comment modéliser une épidémie ?
- 3 Que donne la modélisation mathématique pour le COVID-19 ?
- 4 Quelques documents en ligne et pistes pour aller plus loin

Ouvrages et ressources en ligne

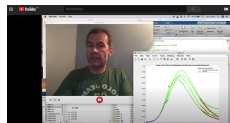
- Le hors série Tangente "mathématiques et médecine"
- Le site Florilège des Maths renvoyant à de nombreuses références :
<https://www.florilege-maths.fr/fiche/mathematiques-et-pandemie/>
- Le site de Marc Lavielle (INRIA et CMAP) de modélisation du COVID :
<http://webpopix.org/covidix19.html>
- La section consacrée au COVID sur le site de IMOSE :
<https://www.imose.fr/covid-19>

Deux vidéos pour revoir l'essentiel de la présentation

- 5 minutes pour expliquer les modèles mathématiques de prédiction du COVID (mise en ligne le 4 avril 2020)



- Un retour vers le futur pour valider le modèle mathématique d'évolution du COVID en 6 minutes (mise en ligne le 6 avril 2020)



Ces deux videos sont visibles sur [ma chaine Youtube "Maximath"](#) avec d'autres videos présentant les outils de mathématiques appliquées (au niveau Licence).