Course on Optimization University of Mauritius, January 2018
Laurent DUMAS, Versailles University

TD1: descent methods (correction)

Exercice 2

1. On se restreintà un compact (fermé borné) de $\mathbb{R}^n$ sur lequel f admet un minimum. Comme f est C^1, on a bien en ce point $g(x^*) = 0$.

2. Un joli dessin suffira...

3.1 Immédiat.

3.2 On a

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq -m_1 t_k q'(0) = m_1 \frac{||x_{k+1} - x_k||}{||d_k||} ||g_k||^2$$

3.3 En utilisant la deuxième inégalité définissant t_k et en soustrayant (g_k, g_k), on trouve tout d'abord

$$(1 - m_2)||g_k||^2 \leq (g_k - g_{k+1}, g_k)$$

ce qui donne ensuite le résultat avec l'inégalité de Cauchy Schwartz et le caractère lipschitzien de g dans S_{x_0}.

3.4 On compose et on somme les relations précédentes. On en déduit que la série de terme général $||g_k||^2$ converge, ce qui implique en particulier que $||g_k||$ converge vers 0.

Question subsidiaire: On peut utiliser l'algorithme de construction de t_k suivant:

- `Etape 0: on part de` $t = t_{init} > 0$`. On note` $t_g = 0$ `et` $t_d = 0$`.`
- `Etape 1: On teste` t `suivant les critères a) b) et c):`
  - `si a), c'est fini`
  - `si b) (`t `trop grand), on note` $t_d = t$ `et on passeà l'étape 2.`
  - `si c) (`t `trop petit), on note` $t_g = t$ `et on passeà l'étape 2.`

- `Etape 2`
  - `si` $t_d = 0$`, on calcule` $t_{new} = \lambda t$
  - `Si` $t_d > 0$`, on calcule` $t_{new} = \frac{t_g+t_d}{2}$.
- `Etape 3:  on boucle avec l'étape 1 avec le nouveau` t.

`avec a) b) et c) les conditions suivantes:`

a) t_k *est satisafaisant si* $q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0)$ *et* $q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$.

b) t_k *est trop grand si* $q(t_k) > q(0) + m_1 t_k q'(0)$.

c) t_k *est trop petit si* $q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0)$ *et* $q'(t_k) < m_2 q'(0)$

On montre que cet algorithme converge en un nombre fini d'étapes. En effet, il est impossible de répéter une infinité de fois la première condition de l'étape 2 (car f tend vers l'infini en l'infini). Il est également impossible de répéter une infinité de fois la deuxième condition de l'étape 2. En effet, en raisonnant par l'absurde, t_g et t_d sont deux suites adjacentes de limite t^* pour lequel $q(t^*) = q(0) + m_1 t^* q'(0)$. On aurait alors $q'(t^*) \geq m_1 q'(0)$ ainsi que $q'(t^*) \leq m_2 q'(0)$, ce qui est absurde.

Exercice 4

1. On remarque que J est une fonction coercive c'est à dire:

$$\lim_{||x|| \to +\infty} J(x) = +\infty$$

On en déduit que J possède un minimum global (cf cours et TD). Celui-ci vérifie nécessairement $\nabla J(x) = 0$. Le seul point qui convient $X^* = (x, y, z)$ vérifie donc

$$\begin{cases} 4x^3 - 2 = 0 \\ 8y^3 + 1 = 0 \\ 4z^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$X^* = \left((\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}, (\frac{1}{4})^{\frac{1}{3}} \right)$$

.

2. La direction de descente d_0 vérifie $H_0 d_0 = -g_0$ où H_0 est le Hessien de J en X_0 et d_0 son gradient. On a aisément $g_0 = (2, 9, 3)$ et

$$H_0 = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

ce qui permet d'obtenir (inversion immédiate de H_0):

$$d_0 = (-\frac{1}{6}, -\frac{3}{8}, -\frac{1}{4})$$

d_0 est bien une direction de descente car

$$< d_0, g_0 >= -(\frac{1}{6}) * 2 - (\frac{3}{8}) * 9 - (\frac{1}{4}) * 3 < 0$$

3. On a

$$X_1 = X_0 + d_0 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{13}{4})$$