Master de mathématiques M1.
Analyse Fonctionnelle Appliquée 2.
Année 2005/2006.

Université Versailles-Saint Quentin

Examen du vendredi 8 septembre 2006

13h30-16h30

Bât. Fermat, amphi I

L'usage des calculatrices, des téléphones portables et de tout document est interdit

Exercice 1.

Soit X un espace de Banach et Y_α une famille d'espaces de Banach où $\alpha \in I$, I est un ensemble quelconque d'indices.
Soit T_α une famille d'applications linéaires continues de X dans Y_α, on note
$A = \{x \in X,\ \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_{Y_\alpha} = +\infty\}$.
On suppose que A est non vide.
Soit $k \in \mathbb{N}$, on note $U_k = \{x \in X,\ \sup\limits_{\alpha \in I} \|T_\alpha x\|_{Y_\alpha} > k\}$.

1) Montrer que U_k est un ouvert de X.
2) Soit $y \in A$, soit $\varepsilon > 0$, montrer que pour tout $x \in X$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x + \varepsilon y \in U_k$.
3) Montrer que A est dense dans X.

Exercice 2.

Soit H une espace de Hilbert, soit u, $v \in H$, on note (u/v) le produit hermitien dans H et $\|u\|$ la norme associée.
Soit A une application linéaire continue de $H \to H$, on suppose que $\lambda = \inf\limits_{\substack{u \in H \\ \|u\|=1}} (Au/u) > 0$.

1) Montrer que A est injectif.
2) Calculer $(\operatorname{Im} A)^\perp$ et en déduire que $\operatorname{Im} A$ est dense dans H.
3) Montrer que $\forall u \in H$, $\|Au\| \geqslant \lambda \|u\|$. En déduire que $\operatorname{Im} A$ est fermée dans H.
4) Montrer que A est bijectif.

Exercice 3.

On note X, X_1 et X_2 des espaces de Banach. Soit $Y \subset Z \subset X$ où Y et Z sont des sous espaces vectoriels (non nécessairement fermés) de X.
Soit $T_1 : Y \to X_1$ et $T_2 : Z \to X_2$ des applications linéaires. On suppose que les graphes de T_1 et de T_2 sont fermés. C'est à dire, par exemple pour T_1, que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Y et si $(x_n, T_1 x_n)$ converge vers (x, y) dans $X \times X_1$ alors $x \in Y$ et $T_1 x = y$.

1) Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème du graphe fermé pour conclure que T_1 est continue.

On note $G = \{(x, y) \in Y \times X_1,\ y = T_1 x\}$ c'est à dire le graphe de T_1. On munit G de la norme de $X \times X_1$.
Soit $T : G \to X_2$ défini par $T(x, T_1 x) = T_2 x$

2) Montrer, en appliquant le théorème du graphe fermé, que T est une application linéaire continue.

En déduire qu'il existe $C > 0$ telle que $\|T_2 x\| \leqslant C(\|T_1 x\| + \|x\|)$ pour tout $x \in Y$.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé et soit K une partie convexe de E telle que $0 \in K$. On pose

$$K^* = \{f \in E',\ \forall x \in K,\ \langle f, y\rangle \leqslant 1\}$$
$$K^{**} = \{y \in E,\ \forall f \in K^*,\ \langle f, y\rangle \leqslant 1\}$$

1) Montrer que K^{**} est fermé.

2) Montrer que $K \subset K^{**}$.

3) Montrer, en appliquant le théorème de Hahn-Banach que si $y \notin \overline{K}$, alors il existe $\gamma < 0$ et $f \in E'$ tels que $\langle f, y\rangle < \gamma \leqslant \langle f, z\rangle$ pour tout $z \in K$. En déduire que $y \notin K^{**}$ et que $K^{**} = \overline{K}$.