TD1 AGREG 2004:

ETUDE DE COURBES ET SURFACES

De manière générale, l'objectif des séances de TD de calcul scientifique et symbolique du premier semestre est de compléter certains résultats présentés dans le cours du Mercredi sous la forme d'exercices. Ces derniers sont aussi représentatifs de questions pouvant être soumises en complément d'un texte de modélisation posé à l'oral (voir les deux livres écrits par les membres du jury, [Rug] et [Lich])

1. (interpolation par splines cubiques, compléments)

a) Justifier l'obtention du système tridiagonal pour le calcul des dérivées intérieures de la splines scellée d'interpolation de f dans le cas d'une subdivision régulière à $(n+1)$ points sur $[a,b]$:

$$\begin{aligned}
4p_1 + p_2 &= \frac{3}{h}(f(x_2) - f(a)) - s'(a) \\
p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1} &= \frac{3}{h}(f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})) \\
p_{n-2} + 4p_{n-1} &= \frac{3}{h}(f(b) - f(x_{n-2})) - s'(b)
\end{aligned}$$

(*Indication*: on pourra exprimer s sur chaque sous intervalle en fonction de $f(x_i), f(x_{i+1}), p_i$ et p_{i+1}).

b) Vérifier que la matrice tridiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

est bien symétrique définie positive.

---

2. (interpolation polynomiale par morceaux en 2D, compléments)

a) Vérifier que les triplets formés respectivement d'un triangle, de ses sommets, de l'espace P_1 et d'un parallélogramme, de ses sommets et de l'espace Q_1 forment bien deux exemples d'éléments finis de Lagrange en dimension 2.

Soit Ω un sous ensemble de $\mathbf{R}^2$. On appelle triangulation sur Ω une famille $\mathcal{T}_h$ de triangles $(T_k)_{0\le k\le n_t}$ inclus dans Ω et telle que:

(i) l'intersection de deux triangles distincts est soit vide, soit réduite à un côté entier ou à un point.

(ii) tous les coins de la frontière de Ω sont des sommets de triangles de $\mathcal{T}_h$.

(iii) En notant $\Omega_h = \bigcup_{i=0}^{n} T_i$, les coins de la frontière de Ω_h sont sur la frontière de Ω.

La triangulation est indexée par h qui est la longueur du plus grand des cotés de tous les triangles. Enfin, on note n_s le nombre de sommets de la triangulation et

$$H_h^1 = \{\phi_h \in C(\Omega_h, \mathbf{R}) \quad \text{telle que} \quad \phi_{h|T_k} \in P_1, 0 \leq k \leq n_t\}$$

b) Montrer que lers fonctions de H_h^1 sont entièrement déterminées par leurs valeurs en chacun des n_s sommets et que la dimension de H_h^1 est égale à n_s. Déterminer une base de H_h^1.

c) Soit $\phi \in C(\Omega, \mathbf{R})$. Définir un opérateur de projection associant à ϕ, $\phi_h \in H_h^1$ telle que ϕ_h et ϕ soient égales en chacun des n_s sommets de la triangulation. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} ||\phi - \phi_h||_{L^\infty(\Omega_h)} = 0$$

---

2. (courbes de Bézier) A partir de la famille des polynômes de Bernstein:

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad B_{i,n}(x) = C_n^i x^i (1-x)^{n-i} \quad (n \in \mathbf{N}, 0 \leq i \leq n)$$

on définit pour toute famille de points du plan $(A_i)_{0 \leq i \leq n}$ (appelés points de contrôle) la courbe paramétrée de Bézier ($t \in [0,1] \mapsto M(t) \in \mathbf{R}^2$) par:

$$\forall t \in [0,1], \quad M(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t) A_i$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on construit également la famille de points $(A_{i,j}(t))_{0 \leq j \leq n, j \leq i \leq n}$ par les relations

$$\begin{cases} A_{i,0}(t) = A_i \quad (0 \leq i \leq n) \\ A_{i,j}(t) = tA_{i,j-1}(t) + (1-t)A_{i-1,j-1}(t) \quad (1 \leq j \leq n, j \leq i \leq n) \end{cases}$$

a) Montrer que

$$\forall j \in \{0, ..., n\}, \quad , \forall i \in \{j, ..., n\}, \quad A_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{j} A_{i-j+k} B_{k,j}(t)$$

et en déduire

$$M(t) = A_{n,n}(t)$$

b) Montrer que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall i \in \{1, ..., n-1\}, \quad B'_{i,n} = n(B_{i-1,n-1} - B_{i,n-1})$$

et en déduire

$$M'(t) = n(A_{n,n-1}(t) - A_{n-1,n-1}(t))$$

c) Proposer un algorithme de construction géométrique d'une courbe de Bézier ainsi que de ses tangentes en chaque point (algorithme de Casteljau) et l'appliquer sur l'exemple suivant: $A_0 = (-1, 0), A_1 = (0, 1), A_2 = (1, 1), A_3 = (1, -1)$.