

INTERPOLATION POLYNOMIALE PAR MORCEAUX

Dans tous les exercices, on note $s = \{x_0, \dots, x_{n+1}\}$ une subdivision d'un intervalle $[a, b]$ telle que $x_0 = a$ et $x_{n+1} = b$. On lui associe son pas maximal:

$$\delta(s) = \max_{i \in \{0, \dots, n\}} |x_{i+1} - x_i|.$$

1. (interpolation affine par morceaux)

Soit f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et s une subdivision de $[a, b]$. On construit g^s l'unique application définie sur $[a, b]$ telle que:

- (i) $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $g^s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est affine.
- (ii) $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}$, $g^s(x_i) = f(x_i)$.

On considère alors une famille $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de subdivisions telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \delta(s_n) = 0$.

Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g^{s_n} - f\|_{L^\infty([a, b])} = 0.$$

2. (interpolation cubique par morceaux)

a) Soit $g \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $g(0) = g(1) = g'(0) = g'(1) = 0$. Si $x \in [0, 1]$, montrer qu'il existe $\xi \in]0, 1[$ tel que

$$g(x) = \frac{1}{24} g^{(4)}(\xi) x^2 (1-x)^2$$

b) Soit s une subdivision de $[a, b]$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$, il existe une unique fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que:

- (i) $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\phi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré ≤ 3 .
- (ii) $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}$, $\phi(x_i) = f(x_i)$ et $\phi'(x_i) = f'(x_i)$.

b) On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbf{R})$. Montrer que

$$\|\phi - f\|_\infty \leq \frac{1}{384} \|f^{(4)}\|_\infty \delta(s)^4$$

3. (interpolation par splines cubiques)

Soit s une subdivision de $[a, b]$. On définit E_s comme l'ensemble des fonctions réelles ϕ sur $[a, b]$ telles que:

- (i) $\phi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbf{R})$,
- (ii) Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $\phi|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré ≤ 3 .

a) Montrer que l'application

$$u : \left(E_s \rightarrow \mathbf{R}^{n+4} \right. \\ \left. \phi \mapsto (\phi(a), \phi'(a), \phi''(a), \phi'''(a), \phi_d'''(x_1), \dots, \phi_d'''(x_n)) \right)$$

est un isomorphismes d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de E_s .

b) Montrer que pour toute fonction f définie sur $[a, b]$, il existe une unique fonction $\phi \in E_s$ telle que

(i) $\forall i \in \{0, \dots, n+1\}, \phi(x_i) = f(x_i)$.

(ii) $\phi'(a) = \alpha$ et $\phi'(b) = \beta$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ donnés.

Montrer de plus que si $f \in \mathcal{C}^4([a, b], \mathbf{R})$ et $(\alpha, \beta) = (f'(a), f'(b))$

$$\int_a^b (f''(x) - \phi''(x))^2 dx = \int_a^b f''(x)^2 dx - \int_a^b \phi''(x)^2 dx$$

c) Soit $g \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $g(0) = g(1) = 0$. Montrer que $\|g\|_\infty \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \|g''\|_2$.

En reprenant les notations et définitions de b) avec $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbf{R})$ et $(\alpha, \beta) = (f'(a), f'(b))$, montrer que

$$\|f - \phi\|_\infty \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \|f''\|_2 \delta(s)^{\frac{3}{2}}$$

et

$$\|f' - \phi'\|_\infty \leq \frac{1}{3\sqrt{5}} \|f''\|_2 \delta(s)^{\frac{1}{2}}$$