# TD2 AGREG 2002:

# POLYNÔMES ORTHOGONAUX

**1.** ***(polynômes de Legendre)***

a) Pour $t$ réel, on note $F_t$ l'application de $]-1,1[$ dans $\mathbf{R}$ telle que

$$F_t(x) = (1 - 2tx + x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Montrer l'existence et l'uncité d'une suite de réels de terme général $L_n(t)$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \forall x \in R, \quad F_t(x) = \sum_{k=0}^{n} L_k(t)x^k + x^n \epsilon_n(t,x)$$

où $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon_n(t,x) = 0$. Expliciter $L_n(1)$, $L_n(-1)$ et $L_n(0)$.

b) Etablir l'identité pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$:

$$L_n(t) = \sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})} \frac{(-1)^k (2n-2k)! t^{n-2k}}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}$$

c) Montrer pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, $L_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!} \dfrac{d^n}{dt^n}[(t^2-1)^n]$.

d) Montrer pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$:

$$(n+1)L_{n+1}(t) - (2n+1)tL_n(t) + nL_{n-1}(t) = 0$$

d) Pour $n \geq 1$, montrer que les racines du polynôme $L_n$ sont réelles, simples et situées dans $]-1,1[$.

e) Montrer pour tout $t \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$, $(1-t^2)L_n''(t) - 2tL_n'(t) + n(n+1)L_n(t) = 0$.

f) Montrer pour tout $t \in [-1,1]$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$L_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (t + i\sqrt{1-t^2}\cos\theta)^n d\theta$$

En déduire que $|L_n(t)| \leq 1$ si $t \in [-1,1]$.

g) Expliciter pour $p$ et $q$ distincts $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_p(t)L_q(t)dt$. Identifier $L_n$.

---

**2.** ***(polynômes de Tchebychev)***

On définit sur $[-1,1]$ la fonction $T_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

a) Montrer la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall x \in [-1,1], \quad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x).$$

En déduire que $T_n$ est une fonction polynomiale de degré $n$.

b) Montrer que $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ est parmi les polynômes unitaires de degré $n+1$ celui qui réalise le minimum de la norme infinie sur $[-1,1]$.

c) Montrer que $T_n$ vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)y'' - xy + n^2y = 0$.

d) Montrer que

$$\forall x \in [-1,1], \quad \forall u \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) u^n = \frac{1-ux}{1-2ux+u^2}.$$

e) Montrer que

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^n n! \sqrt{1-x^2}}{(2n)!} \frac{d^n}{dx^n}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$$

f) Montrer que si $n \neq m$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$. Identifier $T_n$.