TD2 AGREG 2004:
POLYNOMES ORTHOGONAUX - INTEGRALES

1. ***(polynômes de Tchebychev et de Legendre)***

On note respectivement $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbf{N}}$ les familles des polynômes orthogonaux et unitaires de Tchebychev et de Legendre sur $]-1;1[$.

a) On définit sur $[-1;1]$ la fonction $U_n(x) = \cos(n\mathrm{Arccos}x)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer la relation de récurrence:

$$\forall n \in \mathbf{N}^*; \quad \forall x \in [-1;1]; \quad U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x).$$

En déduire que U_n est une fonction polynomiale de degré n et déterminer son coefficient dominant.

b) Montrer que U_n vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)U_n'' - xU_n' + n^2U_n = 0$.

c) Montrer que si $n \neq m$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{U_n(x)U_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0$. Comparer U_n et T_n.

d) Montrer pour tout $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$, $L_n(x) = \dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$.

e) Montrer que L_n vérifie l'équation différentielle $(1-x^2)L_n''-2xL_n'+n(n+1)L_n = 0$

---

2. ***(procédé d'extrapolation de Richardson)***

Soit A une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}_+$ et admettant pour tout n un développement limité en 0 du type:

$$A(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots + \alpha_n y^n + O(y^{n+1}).$$

Soit $0 < r < 1$ et $y_0 > 0$. On définit la famille $(A_{m,k})_{0\leq k\leq m}$ par:

$$\forall m \in \mathbf{N}; \quad A_{m,0} = A(r^m y_0)$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*; \forall k \in \mathbf{N}; \quad k \leq m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{A_{m,k} - r^{k+1}A_{m-1,k}}{1-r^{k+1}}.$$

Montrer que à k fixé, $A_{m,k} - \alpha_0 = O((r^m y_0)^{k+1})$ lorsque m tend vers $+\infty$.

---

3. ***(formule d'Euler Mac Laurin)***

a) Soit $f \in C^{n+1}([0;1];\mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. Montrer

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x)dx + \int_0^1 P_{n+1}(x)f^{(n+1)}(x)dx$$

où les famille $(P_j)_{j\in\mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$\begin{cases} P_1(x) = \dfrac{1}{2} - x; \\ \alpha_1 = 0; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_{j+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha_j - P_j(t))dt; \\ \alpha_{j+1} = \displaystyle\int_0^1 P_{j+1}(t)dt \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{N}^*).$$

Montrer de plus que $\forall j \in \mathbf{N}^*; \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad \text{et} \quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.

b) Soit $f \in C^{2n+2}([a;b];\mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On note $h = \dfrac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = T_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2n+2)}(x)dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbf{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0;1[$ et

$$T_k = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a+jh)\right].$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode des trapèzes appliquée à une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbf{R};\mathbf{R})$, soit à support compact (pour l'intégrale totale), soit périodique (pour l'intégrale de période).

---

4. *(méthode de Romberg)*

Soit $f \in C^{\infty}([a;b];\mathbf{R})$. On construit la famille $(A_{m,k})_{0 \le k \le m}$ telle que

$$\forall m \in \mathbf{N}; \quad A_{m,0} = T_{2^m}(f) = \frac{(b-a)}{2^m}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{2^m-1} f\left(a + j\frac{b-a}{2^m}\right)\right]$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*; \forall k \in \mathbf{N}; \quad k \le m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{4^{k+1}A_{m,k} - A_{m-1,k}}{4^{k+1}-1}.$$

Montrer en utilisant la formule d'Euler Mac Laurin et le procédé d'extrapolation de Richardson que, à k fixé et lorsque m tend vers $+\infty$

$$A_{m,k} = \int_a^b f(x)dx + O\left(\frac{1}{2^{m(2k+2)}}\right).$$