TD3 AGREG 2002: METHODES DE QUADRATURE

1. *(estimation de l'erreur pour la méthode de Simpson)*
a) Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a, a[, \mathbf{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

(Indication: considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \dfrac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \dfrac{\alpha}{180} t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).
b) Soit $f \in C^5([a, b], \mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a, b], \mathbf{R})$.

---

2. *(formule d'Euler Mac Laurin)*
a) Soit $f \in C^{n+1}([0, 1], \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. Montrer

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x)dx + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)dx$$

où les famille $(P_j)_{j \in \mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j \in \mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$\begin{cases} P_1(x) = \dfrac{1}{2} - x, \\ \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_{j+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha_j - P_j(t))dt, \\ \alpha_{j+1} = \displaystyle\int_0^1 P_{j+1}(t)dt \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{N}^*).$$

Montrer de plus que $\forall j \in \mathbf{N}^*, \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad$ et $\quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.
b) Soit $f \in C^{2n+2}([a, b], \mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On note $h = \dfrac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = T_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}(\frac{x-a}{h}) f^{(2n+2)}(x)dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbf{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0, 1[$ et

$$T_k = h\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a + jh)\right].$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode des trapèzes appliquée à une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, soit à support compact (pour l'intégrale totale), soit périodique (pour l'intégrale de période).

---

3. ***(procédé d'extrapolation de Richardson)***
Soit A une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}_+$ et admettant un développement limité en 0 du type:

$$A(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + ... + \alpha_n y^n + O(y^{n+1}).$$

Soit $0 < r < 1$ et $y_0 > 0$. On définit la famille $(A_{m,k})_{0 \leq k \leq m}$ par:

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad A_{m,0} = A(r^m y_0)$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, \quad k \leq m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{A_{m,k} - r^{k+1} A_{m-1,k}}{1 - r^{k+1}}.$$

Montrer que à k fixé, $A_{m,k} - \alpha_0 = O((r^m y_0)^{k+1})$ lorsque m tend vers $+\infty$.

---

4. ***(méthode de Romberg)***
Soit $f \in C^{2n+2}([a,b], \mathbf{R})$. On construit la famille $(A_{m,k})_{0 \leq k \leq m}$ telle que

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad A_{m,0} = T_{2^m}(f) = \frac{(b-a)}{2^m} \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{2^m - 1} f(a + j\frac{b-a}{2^m}) \right]$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, \quad k \leq m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{4^{k+1} A_{m,k} - A_{m-1,k}}{4^{k+1} - 1}.$$

Montrer en utilisant la formule d'Euler Mac Laurin et le procédé d'extrapolation de Richardson (Exercices 2 et 3) que, à k fixé et lorsque m tend vers $+\infty$

$$A_{m,k} = \int_\alpha^\beta f(x)dx + O(\frac{1}{2^{m(2k+2)}}).$$