TD3 AGREG 2004:
ALGEBRE LINEAIRE

1. *(Conditionnement. Méthodes directes)*

a) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \dfrac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$ où $\mu_1(A)$ et $\mu_1(A)$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de A (ie des racines des valeurs propres de ${}^tAA$).

b) Soit $A \equiv [a_{i,j}] \in GL_2(\mathbf{R})$. Montrer que $\mathrm{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ où

$$\sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^{2} |a_{i,j}|^2}{2\det(A)}$$

c) Calculer le conditionnement-2 des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre

$$\begin{cases} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases}$$

selon que l'on commence ou non à échanger les 2 équations. Conclure.

d) Calculer le conditionnement-2 des matrices A, L et U où

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A = LU$ désigne la factorisation LU usuelle. Conclure.

---

2. *(matrices de Householder)*

Soit $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{||v||^2} v^t v$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par les matrice I_n et $-I_n$.

a) Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbf{R}) \cap S_n(\mathbf{R})$ et que toute matrice $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ est le produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$ tel que $||x|| = ||y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

c) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure. Préciser la construction de P et R.

d) Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant la factorisation QR d'une matrice A en approximativement $\frac{4n^3}{3}$ opérations élémentaires.

e) Soit $A = [a_{i,j}] \in S_n(\mathbf{R})$ et $k \in \{1, ..., n-1\}$. On dit que A est de type k lorsque les réels $a_{3,1}$, $a_{4,1}$,...,$a_{n,1}$, $a_{4,2}$,...,$a_{n,2}$, $a_{k+1,k-1}$,...,$a_{n,k-1}$ sont tous nuls. Lorsque A est de type $k \leq n-2$, et pour toute matrice H du type

$$H = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

expliciter la matrice $B = {}^tHAH$. Montrer alors qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que ${}^tHAH$ soit de type $k+1$.

f) Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ produit d'au plus $(n-2)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que ${}^tPSP$ soit tridiagonale.

---

3. ***(méthode de la puissance itérée)***
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ une matrice complexe possédant une unique valeur propre de plus grand module λ_1. Soit $q_0 \in \mathbf{C}^n$ non orthogonal au sous espace propre à gauche associé à λ_1. On construit par récurrence les suites $(q_k)_{k\in\mathbf{N}}$, $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(\lambda_1^{(k)}, ..., \lambda_n^{(k)})_{k\in\mathbf{N}^*}$ en posant

$$\begin{cases} x_k = Aq_{k-1} \\ \lambda_j^{(k)} = \dfrac{x_k(j)}{q_{k-1}(j)} \\ q_k = \dfrac{x_k}{||x_k||} \end{cases}$$

Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{A^k q_0}{\lambda_1^k} = v$$

où v est un vecteur propre à droite de A associé à λ_1 et en déduire successivement les trois limites suivantes:

$$\lim_{k\to+\infty} ||Aq_k|| = |\lambda_1|$$

$$\lim_{k\to+\infty} (\frac{\bar{\lambda_1}}{|\lambda_1|})^k q_k = \frac{v}{||v||}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_j^{(k)} = \lambda_1$$