TD4 AGREG 2004:
EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. *Etude du système dynamique de Volterra*
On cherche à étudier le modèle d'évolution suivant dû à Volterra (voir [Mur] et [Rug]):

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt}(t) = an(t) - bn(t)P(t) \quad t \in \mathbf{R}_+, \\ \dfrac{dP}{dt}(t) = -cP(t) + dn(t)P(t), \\ n(0) = n_0 > 0, \\ P(0) = p_0 > 0. \end{cases}$$

où a, b, c et d sont des constantes strictement positives.

a) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution (n, P) du système précédent sur un intervalle ouvert maximal I contenant l'origine.

b) Montrer que pour tout $t \in I$, $n(t) > 0$ et $P(t) > 0$ puis

$$\exists K \in \mathbf{R}, \quad -c \log n(t) + dn(t) - a \log P(t) + bP(t) = K$$

c) Montrer que n et P sont bornées sur I par deux valeurs strictement positives puis que $I = \mathbf{R}$.

d) Déterminer les points d'équilibre du système dynamique à deux dimensions associé ainsi que leur stabilité linéaire.

e) On cherche à présent à établir la nature exacte du point d'équilibre $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ qui ne peut être déduite de l'étude linéaire précédente. On suppose (par exemple) que $n_0 < \frac{c}{d}$ et $P_0 < \frac{a}{b}$. Dresser dans ce cas le tableau de variation de n et P. Montrer en particulier qu'il existe $t_1 < t_2$ tel que

$$n(t_1) = n(t_2) = \frac{c}{d} \quad \text{et} \quad P(t_1) = P(t_2)$$

En déduire que toute courbe intégrale du système de Volterra est fermée.

---

2. *Etude du schéma d'Euler implicite*
Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbf{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \tag{1}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0 + T], \mathbf{R}^m)$ vérifiant (1) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[t_0, t_0 + T] \times \mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^m$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur $\mathbf{R}^m$:

$$\forall t \in [t_0, t_0 + T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbf{R}^m)^2, \quad ||f(t, y_2) - f(t, y_1)|| \leq L||y_2 - y_1||.$$

a) Soit $N \in \mathbf{N}$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer que si $\Delta T L < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante:

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbf{R}^m \text{ fixé}, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

est bien définie.

b)On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + \Delta T L_1)(||e_n|| + ||\epsilon_n||)$$

où $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

c) En déduire

$$||e_n|| \leq e^{L_1 n \Delta T} ||e_0|| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1 (n-1-i)\Delta T} (1 + \Delta T L_1) ||\varepsilon_i||$$

puis la convergence de la méthode d'Euler implicite:

$$\lim_{N \to +\infty, y_0 \to y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} |e_n|) = 0$$

d) On suppose ici que $t_0 = 0$ et $f(t, y) = -\lambda y$ avec $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$, la suite d'Euler implicite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une suite bornée indépendamment de N et:

$$e_N = y_0 e^{-\lambda T} (\frac{T^2 \lambda^2}{2N} + O(\frac{T^3 \lambda^3}{N^2})) + (y_0 - y(t_0)) e^{-\lambda T}$$

Comparer ces résultats avec ceux obtenus avec la méthode d'Euler explicite. Proposer une nouvelle méthode permettant d'améliorer le résultat de convergence précédent.