

TD5 AGREG 2002:

ALGEBRE LINEAIRE

1. (*complexité algorithique*)

On considère les algorithmes optimaux de calcul des quantités suivantes:

- (i) produit de deux matrices $(A, B) \mapsto AB$
- (ii) inversion d'une matrice $A \mapsto A^{-1}$

On note $P_i(n)$ ($i = 1, 2$) le nombre d'opérations élémentaires pour chacun d'eux et on définit l'infimum α_i ($i = 1, 2$) des réel $\alpha \geq 0$ tel que

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \quad P_i(n) \leq Cn^\alpha$$

qu'on appelle le coefficient de complexité algorithmique. Montrer que les deux algorithmes précédents ont le même coefficient de complexité $2 \leq \alpha \leq 3$

2. (*Conditionnement. Méthodes directes*)

a) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer que

$$\text{cond}_2(A) = \frac{\mu_n(A)}{\mu_1(A)}$$

où $\mu_1(A)$ et $\mu_n(A)$ désignent respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs singulières de A (ie des racines des valeurs propres de tAA).

b) Soit $A \equiv [a_{i,j}] \in GL_2(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{cond}_2(A) = \sigma + (\sigma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$ où

$$\sigma = \frac{\sum_{i,j=1}^2 |a_{i,j}|^2}{2\det(A)}$$

c) Calculer le conditionnement-2 des matrices exactes obtenues à la première étape de la procédure d'élimination de Gauss pour résoudre

$$\begin{cases} 10^{-4}u_1 + u_2 = 1 \\ u_1 + u_2 = 2 \end{cases}$$

selon que l'on commence ou non à échanger les 2 équations. Conclure.

d) Calculer le conditionnement-2 des matrices A , L et U où

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $A = LU$ désigne la factorisation LU usuelle. Conclure.

3. (*Méthodes itératives*)

Soit $A \equiv [a_{i,j}]$ une matrice à diagonale strictement dominante, à savoir:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j \neq i} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$$

a) Montrer que $A \in GL_n(\mathbf{R})$.

b) Montrer que les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel convergent pour cette matrice.

c) Soit la matrice $n \times n$ (de discrétisation du Laplacien par différences finies):

$$A = \frac{1}{(n+1)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer et comparer les vitesses de convergence des méthodes de Jacobi, Gauss Seidel et de relaxation optimale.

4. (*matrices de Householder*)

Soit $v \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{\|v\|^2} v v^t$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par les matrices I_n et $-I_n$.

a) Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbf{R}) \cap S_n(\mathbf{R})$ et que toute matrice $\Omega \in O_n(\mathbf{R})$ est le produit d'au plus n matrices de $\mathcal{H}$.

b) Soit $(x, y) \in (\mathbf{R}^n)^2$ tel que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

c) Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure. Préciser la construction de P et R .

d) Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant la factorisation QR d'une matrice A en approximativement $\frac{4n^3}{3}$ opérations élémentaires.

e) Soit $A = [a_{i,j}] \in S_n(\mathbf{R})$ et $k \in \{1, \dots, n-1\}$. On dit que A est de type k lorsque les réels $a_{3,1}, a_{4,1}, \dots, a_{n,1}, a_{4,2}, \dots, a_{n,2}, a_{k+1,k-1}, \dots, a_{n,k-1}$ sont tous nuls. Lorsque A est de type $k \leq n-2$, et pour toute matrice H du type

$$H = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$$

expliciter la matrice $B = {}^t H A H$. Montrer alors qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que ${}^t H A H$ soit de type $k+1$.

f) Soit $S \in S_n(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbf{R})$ produit d'au plus $(n-2)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que ${}^t P S P$ soit tridiagonale.