TD5 AGREG 2004:
OPTIMISATION ET EDP

1. *(Algorithme d'Uzawa)*
Soit J une fonctionnelle quadratique sur $\mathbf{R}^n$:

$$J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

où $A \in SDP_n(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ $(m \leq n)$ de rang m. On note $K = \mathrm{Ker}(B)$.

a) Montrer que J possède un unique minimum u sur K caractérisé par l'existence de $p \in \mathbf{R}^m$ tel que $\nabla J(u) = {}^tBp$.

b) On considère l'algorithme de construction des suites $((u_k, p_k))_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)^{\mathbf{N}}$ tel que $p_0 \in \mathbf{R}^m$ et

$$\begin{cases} Au_k - b - {}^tBp_k = 0 \\ p_{k+1} = p_k - \rho B u_k \end{cases}$$

avec $\rho > 0$. Montrer que si ρ est suffisament petit, la suite (u_k, p_k) converge vers (u, p).

---

2. *(Méthode de pénalisation)*
Soit J une fonctionnelle sur $\mathbf{R}^n$, semi continue inférieurement et $\alpha-$convexe, c'est à dire:

$$\forall (u, v, \theta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0, 1], \quad J((1-\theta)u + \theta v) + \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)||v-u||^2 \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v)$$

a) Soit K un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$. Montrer que J possède un unique minimum sur K noté x_0.

b) On suppose qu'il existe une fonction convexe continue positive sur $\mathbf{R}^n$, notée F, telle que $v \in K$ équivaut à $F(v) = 0$. Pour $\epsilon > 0$, on introduit une pénalisation J_ϵ de la fonction J:

$$J\epsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\epsilon} F(v)$$

Montrer que $J\epsilon$ possède un unique minimum sur $\mathbf{R}^n$ noté x_ϵ.

c) Montrer que les suites $(J(x_\epsilon))_{(\epsilon > 0)}$ et $(J_\epsilon(x_\epsilon))_{(\epsilon > 0)}$ sont bornées et en déduire que x_ϵ tend vers x_0 si ϵ tend vers 0.

---

3. *(schéma de Lax Friedrichs)*
Pour approcher l'EDP suivante:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial f(u(t, x))}{\partial x} = 0$$

on utilise, avec les notations usuelles, le schéma suivant dit de Lax Friedrichs:

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n))$$

a) Montrer que ce schéma découple les points tels que $j+n$ pair et $j+n$ impair.

b) Montrer que ce schéma est consistant, conservatif et calculer sa fonction de flux numérique $\Phi(.,.)$.

b) Etudier la stabilité du schéma au sens de Von Neuman lorsque $f(u)=cu$.

---

4. ***(solution de l'équation de la chaleur)*** On s'intéresse aux solutions $u \in C^0(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}, \mathbf{R}) \cap C^{1,2}(\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ du système suivant (EDP de la chaleur avec conditions initiales):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in \mathbf{R}, \end{cases}$$

où u_0 est une fonction réelle continue et bornée sur $\mathbf{R}$.

a) Montrer que la fonction

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{(x-y)^2}{4t}) u_0(y) dy.$$

est correctement définie sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et est solution de l'EDP de la chaleur.

b) Montrer que v peut être prolongée par continuité à $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et que son prolongement satisfait la condition initiale du système.

c) Montrer que v est bornée sur $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ et vérifie le principe du maximum, à savoir:

$$||v||_{L^\infty(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R})} \leq ||u_0||_{L^\infty(\mathbf{R})}$$

et si u_0 est positive et non nulle,

$$\forall (t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}, \quad v(t,x) > 0.$$

d) On suppose que u_0 est périodique de période 2π. Montrer que si u est une solution du système de la chaleur, alors $u(t,.)$ est périodique de période 2π pour tout $t > 0$. On note respectivement $(a_k(t), b_k(t))$ et $(\tilde{a}_k(t), \tilde{b}_k(t))$ les coefficients de Fourier de $u(t,.)$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t,.)$. Montrer que a_k et b_k sont continues sur $\mathbf{R}_+$ et C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$. Exprimer a_k' et b_k' en fonction de $\tilde{a}_k$ et $\tilde{b}_k$. En déduire que pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-k^2 t} (\alpha_k \cos(kx) + \beta_k \cos(kx))$$

où α_k et β_k sont des coefficients à déterminer.

e) Conclure à l'existence et l'unicité d'une solution du système de la chaleur pour toute donnée initiale périodique.