

MINIMISATION DE FONCTIONNELLES

1. (Algorithme d'Uzawa)

Soit J une fonctionnelle quadratique sur $\mathbf{R}^n$:

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

où $A \in SDP_n(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ ($m \leq n$) de rang m . On note $K = \text{Ker}(B)$.

a) Montrer que J possède un unique minimum u sur K caractérisé par l'existence de $p \in \mathbf{R}^m$ tel que $\nabla J(u) = {}^t B p$.

b) On considère l'algorithme de construction des suites $((u_k, p_k))_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)^{\mathbf{N}}$ tel que $p_0 \in \mathbf{R}^m$ et

$$\begin{cases} Au_k - b - {}^t B p_k = 0 \\ p_{k+1} = p_k - \rho B u_k \end{cases}$$

avec $\rho > 0$. Montrer que si ρ est suffisamment petit, la suite (u_k, p_k) converge vers (u, p) .

2. (Méthodes de gradient)

Soit J une fonctionnelle elliptique sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^1 :

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall (u, v) \in (\mathbf{R}^n)^2, \quad \langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2.$$

On rappelle que J possède un unique minimum, noté x_0 sur $\mathbf{R}^n$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique réel $\alpha(x)$ tel que

$$J(x - \alpha(x) \nabla J(x)) = \min_{\alpha \in \mathbf{R}} J(x - \alpha \nabla J(x)).$$

b) On définit de manière itérative à partir de la relation précédente une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par

$$u_0 \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad u_{k+1} = u_k - \alpha(u_k) \nabla J(u_k) \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\langle \nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k) \rangle = 0$ (orthogonalité de deux directions de descente consécutives) puis

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_{k+1} - u_k\| = 0.$$

c) Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée et en déduire successivement que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla J(u_{k+1}) - \nabla J(u_k)\| = 0$$

puis

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla J(u_k) = 0.$$

et enfin que la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers x_0 (méthode du gradient à pas optimal).

d) On suppose de plus que

$$\exists M > 0, \quad \forall (u, v) \in (\mathbf{R}^n)^2, \quad \|\nabla J(u) - \nabla J(v)\| \leq M\|v - u\|.$$

Soit $(\rho_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une famille de réels telle que

$$\exists (a, b) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad 0 < a \leq \rho_k \leq b < \frac{2\alpha}{M^2}.$$

Montrer que la suite $(v_k)_{k \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$ vérifiant

$$v_0 \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad v_{k+1} = v_k - \rho_k \nabla J(v_k) \quad (k \in \mathbf{N})$$

converge géométriquement vers x_0 (*méthode du gradient à pas variable*).

3. (Méthode de pénalisation)

Soit J une fonctionnelle sur $\mathbf{R}^n$, semi continue inférieurement et α -convexe, c'est à dire:

$$\forall (u, v, \theta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0, 1], \quad J((1-\theta)u + \theta v) + \frac{\alpha}{2} \theta(1-\theta) \|v - u\|^2 \leq (1-\theta)J(u) + \theta J(v)$$

a) Soit K un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$. Montrer que J possède un unique minimum sur K noté x_0 .

b) On suppose qu'il existe une fonction convexe continue positive sur $\mathbf{R}^n$, notée F , telle que $v \in K$ équivaut à $F(v) = 0$. Pour $\epsilon > 0$, on introduit une pénalisation J_ϵ de la fonction J :

$$J_\epsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\epsilon} F(v)$$

Montrer que J_ϵ possède un unique minimum sur $\mathbf{R}^n$ noté x_ϵ .

c) Montrer que les suites $(J(x_\epsilon))_{(\epsilon > 0)}$ et $(J_\epsilon(x_\epsilon))_{(\epsilon > 0)}$ sont bornées et en déduire que x_ϵ tend vers x_0 si ϵ tend vers 0.

4. (Algorithme du simplexe)

Une entreprise fabrique 2 pièces d'automobile dans 2 ateliers dont les capacités de production sont de 12 heures chacun. La pièce 1 (respectivement 2) nécessite 2 heures (respectivement 1h) d'usinage dans l'atelier 1 et 1 heure (respectivement 2h) d'usinage dans l'atelier 2. Sachant que la marge de vente de la pièce 1 (respectivement 2) est de 4 euros (respectivement 3 euros), comment l'entreprise doit répartir sa production pour optimiser ses gains (proposer une solution graphique et une autre avec la méthode du simplexe)?