TD6 AGREG 2003:

EDO et EDP

---

1. ***(Etude d'une EDO avec conditions aux limites)*** Dans cet exercice, on étudie l'équation différentielle avec conditions aux limites suivante:

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où $c \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}_+)$ et $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$.

a) A l'aide du théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué au problème de Cauchy paramétré par $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{cases} -u_\lambda''(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x), \quad x \in]0,1[\\ u_\lambda(0) = 0 \\ u_\lambda'(0) = \lambda \end{cases}$$

montrer qu'il existe une unique solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbf{R})$ de (1) (méthode de tir).

b) Montrer que si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$ (principe du maximum).

c) On cherche à présent à approcher u à l'aide d'une méthode de type différences finies. Dans toute la suite, on note $h = \frac{1}{N+1}$ où $N \in \mathbf{N}$. Montrer tout d'abord que pour toute fonction $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbf{R})$, il existe $C \geq 0$ tel que

$$\forall N \in \mathbf{N},\, \forall i \in \{1, ..., N\},\, |u''(ih) - \frac{1}{h^2}(u((i+1)h) + u((i-1)h) - 2u(ih))| \leq Ch^2$$

d) On propose pour approcher u le schéma consistant à construire pour tout $N \in \mathbf{N}$ la famille $(u_i)_{0 \leq i \leq N+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(ih)u_i = f(ih) \quad (1 \leq i \leq N) \\ u_0 = u_{N+1} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Montrer que le vecteur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N}$ est caractérisé par une relation du type $AU = F$ avec $F \in \mathbf{R}^N$ et $A \in SDP_N(\mathbf{R})$ à déterminer.

e) On considère la famille des matrices $B \in \mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (M matrices):

$$\begin{cases} B_{i,i} > 0 \\ B_{i,j} \leq 0 \quad (i \neq j) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N} B_{i,j} > 0 \quad (1 \leq i \leq N) \end{cases}$$

Montrer que $B \in GL_N(\mathbf{R})$ et que si $F \in \mathbf{R}^N$ a des coordonnées toutes positives, il en est de même pour $B^{-1}F$. En déduire que tous les coefficients de B^{-1} sont positifs.

f) En utilisant le fait que pour tout $\epsilon > 0$, $A + \epsilon I$ est une M-matrice, montrer que tous les coefficients de A^{-1} sont positifs (principe du maximum discret)

g) En utilisant le vecteur $V = (v(h), ...v(Nh))$ avec $v(x) = \frac{1}{2}x(1-x)$, montrer que

$$|||A^{-1}|||_\infty \leq \frac{1}{8}$$

h) Montrer la convergence d'ordre 2 du schéma d'approximation (2) de (1) pour des données c et f de classe $\mathcal{C}^2$, à savoir:

$$\exists C \geq 0, \quad \forall N \in \mathbf{N}, \quad \max_{0 \leq i \leq N+1} (|u_i - u(ih)|) \leq Ch^2$$

---

2. *(Etude d'une EDP d'évolution)* On définit le schéma d'approximation aux différences finies explicite (respectivement implicite) de l'EDP bien posée suivante:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \Delta u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times]0,1[, \\ u(t,0) = u(t,1) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_+^*, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad x \in]0,1[, \end{cases} \tag{3}$$

où $u_0 \in L^2(]0,1[)$ par la relation

$$\begin{cases} \dfrac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\delta} = \dfrac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2}, \quad (n,j) \in \mathbf{N} \times \{1,...,N\}, \\ U_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \{1,...,N\} \end{cases}$$

(avec la convention $U_0^n = U_{N+1}^n = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$), respectivement:

$$\begin{cases} \dfrac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\delta} = \dfrac{V_{j+1}^{n+1} - 2V_j^{n+1} + V_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \quad (n,j) \in \mathbf{N} \times \{1,...,N\}, \\ V_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \{1,...,M\} \end{cases}$$

(avec la même convention) où $\delta > 0$ et $h = \dfrac{1}{N+1}$.

a) Montrer que ces schémas sont respectivement équivalents à

$$\begin{cases} U^{n+1} = A(\lambda)U^n, \quad n \in \mathbf{N}, \\ U_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \{1,...,N\} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} V^{n+1} = B(\lambda)V^n, \quad n \in \mathbf{N}, \\ V_j^0 = u_0(x_j), \quad j \in \{1,...,N\}, \end{cases}$$

en notant pour tout $n \in \mathbf{N}$, $U^n = (U_j^n)_{1 \leq j \leq N}$, $V^n = (V_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ et où A et B sont deux matrices dans $\mathcal{M}_N(\mathbf{R})$ dépendant de $\lambda = \frac{\delta}{h^2}$ que l'on explicitera. En déduire que ces deux schémas sont bien définis au sens où pour chaque donnée initiale U^0 et V^0, ils déterminent chacun une et une seule suite de vecteurs de $\mathbf{R}^N$.

b) Montrer que le schéma implicite est inconditionnellement stable au sens où

$$\forall \delta \in \mathbf{R}_+^*, \forall N \in \mathbf{N}^*, \forall (V_j^0)_{1 \leq j \leq N} \in \mathbf{R}^N, \forall n \in \mathbf{N}, \max_{1 \leq j \leq N} |V_j^n| \leq \max_{1 \leq j \leq N} |V_j^0|$$

et le schéma explicite stable si $\lambda \leq \frac{1}{2}$.

c) On suppose que la solution u du problème (3) appartient à $C_b^{2,4}(\mathbf{R}_+ \times [0,1])$ (à savoir que les deux fonctions $t \mapsto u(t,x) \in C^2(\mathbf{R}_+)$ et $x \mapsto u(t,x) \in C^4([0,1])$ sont bornées uniformément ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 et 4 respectivement). Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, ne dépendant que de u, telle que pour tout $T > 0$ et pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, on ait

$$\max_{(n,j)\in\{0,\ldots,E(\frac{T}{\delta})\}\times\{1,\ldots,N\}} |U_j^n - u(n\delta, jh)| \leq CTh^2$$

si le pas de temps δ est suffisament petit ($\lambda \leq \dfrac{1}{2}$) et

$$\max_{(n,j)\in\{0,\ldots,E(\frac{T}{\delta})\}\times\{1,\ldots,N\}} |V_j^n - u(n\delta, jh)| \leq CT(\delta + h^2)$$

pour tout $\delta \in \mathbf{R}_+^*$.