TD7 AGREG 2003:
MINIMISATION DE FONCTIONNELLES

1. *(Algorithme d'Uzawa)*
Soit J une fonctionnelle quadratique sur $\mathbf{R}^n$:

$$J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

où $A \in SDP_n(\mathbf{R})$ et $b \in \mathbf{R}^n$. Soit $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ $(m \leq n)$ de rang m. On note $K = \mathrm{Ker}(B)$.

a) Montrer que J possède un unique minimum u sur K caractérisé par l'existence de $p \in \mathbf{R}^m$ tel que $\nabla J(u) = {}^t Bp$.

b) On considère l'algorithme de construction des suites $((u_k, p_k))_{k \in \mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)^{\mathbf{N}}$ tel que $p_0 \in \mathbf{R}^m$ et

$$\begin{cases} Au_k - b - {}^t Bp_k = 0 \\ p_{k+1} = p_k - \rho B u_k \end{cases}$$

avec $\rho > 0$. Montrer que si ρ est suffisament petit, la suite (u_k, p_k) converge vers (u, p).

---

2. *(Méthodes de gradient)*
Soit J une fonctionnelle elliptique sur $\mathbf{R}^n$ de classe C^1:

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall (u, v) \in (\mathbf{R}^n)^2, \quad < \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v > \geq \alpha ||v - u||^2.$$

On rappelle que J possède un unique minimum, noté x_0 sur R^n.
a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, il existe un unique réel $\alpha(x)$ tel que

$$J\left(x - \alpha(x) \nabla J(x)\right) = \min_{\alpha \in \mathbf{R}_+} J\left(x - \alpha \nabla J(x)\right).$$

b) On définit de manière itérative à partir de la relation précédente une suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ par

$$u_0 \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad u_{k+1} = u_k - \alpha(u_k) \nabla J(u_k) \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $< \nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k) >= 0$ (orthogonalité de deux directions de descente consécutives) puis

$$\lim_{k \to +\infty} ||u_{k+1} - u_k|| = 0.$$

c) Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ est bornée et en déduire successivement que

$$\lim_{k \to +\infty} ||\nabla J(u_{k+1}) - \nabla J(u_k)|| = 0$$

puis

$$\lim_{k \to +\infty} \nabla J(u_k) = 0.$$

et enfin que la suite $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers x_0 (*méthode du gradient à pas optimal*).

d) On suppose de plus que

$$\exists M > 0, \quad \forall (u,v) \in (\mathbf{R}^n)^2, \quad ||\nabla J(u) - \nabla J(v)|| \leq M||v-u||.$$

Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une famille de réels telle que

$$\exists (a,b) \in \mathbf{R}^2, \quad \forall k \in \mathbf{N}, \quad 0 < a \leq \rho_k \leq b < \frac{2\alpha}{M^2}.$$

Monter que la suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$ vérifiant

$$v_0 \in \mathbf{R}^n \quad \text{et} \quad v_{k+1} = v_k - \rho_k \nabla J(v_k) \quad (k \in \mathbf{N})$$

converge géométriquement vers x_0 (*méthode du gradient à pas variable*).

---

3. ***(Méthode de pénalisation)***
Soit J une fonctionnelle sur $\mathbf{R}^n$, semi continue inférieurement et $\alpha-$convexe, c'est à dire:

$$\forall (u,v,\theta) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0,1], \quad J((1-\theta)u+\theta v)+\frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)||v-u||^2 \leq (1-\theta)J(u)+\theta J(v)$$

a) Soit K un convexe fermé de $\mathbf{R}^n$. Montrer que J possède un unique minimum sur K noté x_0.

b) On suppose qu'il existe une fonction convexe continue positive sur $\mathbf{R}^n$, notée F, telle que $v \in K$ équivaut à $F(v) = 0$. Pour $\epsilon > 0$, on introduit une pénalisation J_ϵ de la fonction J:

$$J\epsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\epsilon}F(v)$$

Montrer que $J\epsilon$ possède un unique minimum sur $\mathbf{R}^n$ noté x_ϵ.

c) Montrer que les suites $(J(x_\epsilon))_{(\epsilon>0)}$ et $(J_\epsilon(x_\epsilon))_{(\epsilon>0)}$ sont bornées et en déduire que x_ϵ tend vers x_0 si ϵ tend vers 0.

---

4. ***(points remarquables d'un triangle)***
Soit $T = [ABC]$ un vrai triangle. Pour tout point M à l'intérieur de T, on note x_M, y_M et z_M les distances de M aux trois côtés. On définit les deux fonctions f et g sur T par

$$\begin{cases} f(M) = x_M y_M z_M, \\ g(M) = x_M^2 + y_M^2 + z_M^2. \end{cases}$$

a) Montrer que le maximum de f sur T est uniquement atteint au centre de gravité de T.

b) Montrer que le minimum de g sur T est uniquement atteint au point de Lemoyne de T (intersection des symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures issues du même sommet).