TD3 AGREG 2003:

METHODES D'ACCELERATION DE CONVERGENCE

1. ***(Accélération de convergence d'Aitken)***

Soit l'opérateur classique aux différences finies progressives Δ:

$$\Delta : \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \\ (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (\Delta x_n)_{n\in\mathbf{N}} \end{pmatrix}$$

avec $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Soit $\bar{x} \in \mathbf{R}$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ne prenant jamais la valeur $\bar{x}$. On suppose qu'il existe un coefficient $k \in [0, 1[$ et une suite auxiliaire $(z_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergeant vers 0 et vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad x_{n+1} - \bar{x} = (k + z_n)(x_n - \bar{x}).$$

Montrer que pour n assez grand, le réel x'_n tel que

$$x'_n = x_n - \frac{(\Delta x_n)^2}{\Delta^2 x_n} = x_n - \frac{x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_n + x_n^2}{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}$$

est bien défini et vérifie

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x'_n - \bar{x}}{x_n - \bar{x}} = 0.$$

---

2. ***(procédé d'extrapolation de Richardson)***

Soit A une fonction réelle définie sur $\mathbf{R}_+$ et admettant pour tout n un développement limité en 0 du type:

$$A(y) = \alpha_0 + \alpha_1 y + ... + \alpha_n y^n + O(y^{n+1}).$$

Soit $0 < r < 1$ et $y_0 > 0$. On définit la famille $(A_{m,k})_{0\leq k\leq m}$ par:

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad A_{m,0} = A(r^m y_0)$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, \quad k \leq m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{A_{m,k} - r^{k+1}A_{m-1,k}}{1 - r^{k+1}}.$$

Montrer que à k fixé, $A_{m,k} - \alpha_0 = O((r^m y_0)^{k+1})$ lorsque m tend vers $+\infty$.

---

3. ***(Méthode de Steffensen)***

Soit $p \in \mathbf{N}^*$, $g \in C^{p+1}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $\bar{x} \in \mathbf{R}$ tel que

$$\begin{cases} g(\bar{x}) = \bar{x}, \\ g'(\bar{x}) = ... = g^{(p-1)}(\bar{x}) = 0, \\ g^{(p)}(\bar{x}) \neq 0 \end{cases}$$

(on suppose en outre que $g'(\bar{x}) \neq 1$ si $p = 1$).

Montrer qu'il existe un voisinage V de $\bar{x}$ sur lequel la fonction

$$h : \left(\begin{array}{l} V \to \mathbf{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \dfrac{x(g\circ g)(x) - g(x)^2}{(g\circ g)(x) - 2g(x) + x} & \text{si} \quad x \neq \bar{x} \\ \bar{x} \quad \text{si} \quad x = \bar{x} \end{cases} \end{array} \right)$$

est correctement définie et où la suite $(x'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ construite par la formule

$$x'_0 \in V \quad \text{et} \quad x'_{n+1} = h(x'_n) \quad (n \in \mathbf{N})$$

est également bien définie et converge vers $\bar{x}$ avec un ordre $2p-1$ si $p > 1$ et 2 si $p = 1$.

---

4. *(formule d'Euler Mac Laurin)*

a) Soit $f \in C^{n+1}([0,1], \mathbf{R})$ $(n \in \mathbf{N}^*)$. Montrer

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x)dx + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)dx$$

où les famille $(P_j)_{j\in\mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}[X]^{\mathbf{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j\in\mathbf{N}^*} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$\begin{cases} P_1(x) = \dfrac{1}{2} - x, \\ \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} P_{j+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (\alpha_j - P_j(t))dt, \\ \alpha_{j+1} = \displaystyle\int_0^1 P_{j+1}(t)dt \end{cases} \qquad (j \in \mathbf{N}^*).$$

Montrer de plus que $\forall j \in \mathbf{N}^*, \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad \text{et} \quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.

b) Soit $f \in C^{2n+2}([a,b], \mathbf{R})$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On note $h = \dfrac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = T_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2n+2)}(x)dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbf{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0,1[$ et

$$T_k = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a+jh)\right].$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode des trapèzes appliquée à une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, soit à support compact (pour l'intégrale totale), soit périodique (pour l'intégrale de période).

---

5. *(méthode de Romberg)*
Soit $f \in C^\infty([a,b],\mathbf{R})$. On construit la famille $(A_{m,k})_{0\leq k\leq m}$ telle que

$$\forall m \in \mathbf{N}, \quad A_{m,0} = T_{2^m}(f) = \frac{(b-a)}{2^m}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{2^m-1} f(a+j\frac{b-a}{2^m})\right]$$

et

$$\forall m \in \mathbf{N}^*, \forall k \in \mathbf{N}, \quad k \leq m-1 \Rightarrow A_{m,k+1} = \frac{4^{k+1}A_{m,k} - A_{m-1,k}}{4^{k+1}-1}.$$

Montrer en utilisant la formule d'Euler Mac Laurin et le procédé d'extrapolation de Richardson que, à k fixé et lorsque m tend vers $+\infty$

$$A_{m,k} = \int_a^b f(x)dx + O(\frac{1}{2^{m(2k+2)}}).$$