Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°1 : rappels et compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. On définit l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad N(A) = \sum_{i,j} |A_{i,j}|.$$

i) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
ii) La norme N est-elle une norme subordonnée ?
iii) La norme N est-elle une norme matricielle (c'est à dire telle que $N(AB) \leq N(A)N(B)$) ?

Exercice 2. Normes subordonnées aux normes l_p Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Montrer que

$$|||A|||_1 = \max_{1\leq j\leq n}(\sum_{i=1}^{n} |A_{ij}|), \quad \text{et} \quad |||A|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|).$$

Exercice 3. Norme matricielle et rayon spectral Soit $N(A) = \max_{i,j} |A_{ij}|$.

i) Est-ce une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
ii) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A) > N(A)$ (on rappelle que $\rho(A)$ est égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A)
iii) La norme N est-elle une norme subordonnée ?

Exercice 4. Norme de Frobenius ou norme de Schur

(A) (a) Dans l'espace $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ l'espace des matrices antisymétriques. Montrer

$$\mathcal{S}_n \quad \oplus \quad \mathcal{A}_n \quad = \quad \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(b) Montrer que l'application $< .,. >$ définie de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad < A, B > \quad = \quad \mathrm{tr}((^tA)B),$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que pour ce produit scalaire

$$\mathcal{S}_n \quad = \quad (\mathcal{A}_n)^\perp.$$

(B) On définit

$$|||A|||_s = \sqrt{\mathrm{tr}(^tA \cdot A)}.$$

(a) Montrer que

$$|||A|||_s = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

(b) Montrer que $|||\cdot|||_s$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on l'appelle norme de Schur).

(c) Montrer que $|||\cdot|||_s$ n'est pas une norme subordonnée à une norme vectorielle.

(d) Montrer que $|||\cdot|||_s$ est une norme matricielle.

(e) Montrer que $\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$.

(f) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad |||A|||_2 \leq |||A|||_s \leq \sqrt{n}|||A|||_2$.

Exercice 5. <u>Conditionnement d'une matrice</u> Soient A et δA deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et $A + \delta A$ soient inversibles. Le vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tel que $b \neq 0$ étant donné, on note x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires :

$$Ax = b, \qquad (A + \delta A)(x + \delta x) = b. \tag{1}$$

Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq \mathrm{cond}(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}, \tag{2}$$

et que cette inégalité est la meilleure possible : en effet, montrer que A étant fixée, on peut choisir b et δA tels que l'on ait égalité dans (2).

Exercice 6. <u>Conditionnement du Laplacien discrétisé par différences finies</u>
On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice carrée d'ordre n, représentant le Laplacien discret, défnie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que A est symétrique définie positive : on montrera que

$$(Ay, y) = \sum_{i=0}^{n} (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \text{ en posant } y_0 = y_{n+1} = 0$$

ii) Diagonaliser la matrice A dans le cas $n = 3$ (on peut remarquer l'existence d'une valeur propre évidente).

iii) On revient au cas général et on considère les vecteurs $v_k, k = 1, .., n$ suivants :

$$v_k = [\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), .., \sin(\frac{nk\pi}{n+1})]^T, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Calculer Av_k, pour $k = 1, \cdots, n$ et en déduire la diagonalisation de A.

iv) calculer un équivalent, lorsque n tend vers l'infini du conditionnement de A.