Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°2 : interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1. Polynômes de Lagrange et de Hermite

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction C^3 sur $[0,1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\lim_{\epsilon -> 0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points* $0, 1$ *et aux entiers* $1, 0$, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M.

(Indication : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\varphi^{(3)}(\xi) = 0$).

Exercice 2. Interpolation d'Hermite

i) Soit $\alpha_i, i = 1\ldots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in_3 [X]$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

ii) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1\ldots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question 1 .s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, p_i(x). \tag{3}$$

iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

Exercice 3. Fonctions paires et polynôme d'interpolation

i) Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire f relativement aux points $\{-2,-1,0,1,2\}$ est pair.

ii) Soit la fonction définie sur $[-2,2]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de f relativement aux zéros de T_5 peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.

iii) Donner une expression de $q(u)$ puis en déduire une expression de $P(x)$.

Exercice 4. Etude de l'erreur d'interpolation pour des points équidistants

Soit p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de , relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de cet intervalle. Afin d'estimer l'erreur d'interpolation

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\,\pi_{n+1}(x)\, f^{(n+1)}(\xi_x), \qquad \pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

nous nous proposons de calculer une majoration de $|\pi_{n+1}(x)|$, $x \in [a,b]$ pour différents choix de la répartition des points d'interpolation.

Lorsque les points d'interpolation sont équidistants, on a

$$|\pi_{n+1}(x_0 + sh)| = h^{n+1} \underbrace{|s(s-1)\cdots(s-n)|}_{\phi(s)}.$$

• Montrer que $\phi(s)$ atteint son maximum en un point $s_n \in]0,1[$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.

• Montrer que $\phi(s_n) \leq \dfrac{C_1}{\ln n} n!$, où C_1 est une constante positive.

• En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\pi_{n+1}(x)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}\,\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$

Exercice 5.

Déterminer la meilleure approximation polynomiale de degré ≤ 1 au sens de la norme quadratique sur $[-1,1]$ de $f(x) = x^3$.

Exercice 6. Polynômes deTchebichev

a) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1,1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Montrer que les polynômes t_n vérifient la relation de récurrence :

$$t_{n+1}(x) = 2x\, t_n(x) - t_{n-1}(x)$$

Exercice 7. Polynômes de Legendre On pose $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)$ et pour tout entier n on définit le polynôme P_n par

$$Q_n(X) = (X^2-1)^n,\ P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} Q_n^{(n)}.$$

i) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

ii) Justifier que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii) En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

iv) Déterminer les racines de Q_n ainsi que leur multiplicité.

v) Montrer que P_n a au moins n racines dans l'intervalle $]-1,1[$.

vi) Donner le nombre exact de racines de P_n ainsi que leur multiplicité.

vii) Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\,dt \ = \ \sum_{k=0}^{n} \left[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\right]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1} \int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{6}$$

viii) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\,dt \ = \ 0$

Exercice 8. Méthode de Gauss-Legendre On reprend les notations de l'exercice précédent. On note $a_0, \cdots, a_n$ les racines distinctes de P_{n+1}.

i) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \varphi(P) = (P(a_0), \cdots, P(a_n))$, est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

ii) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \{0, \cdots, n\}$, on ait $P(a_i) = f(a_i)$. On notera $P = P_f$ cet unique polynôme déterminé par f.

On pose $L_i = \prod_{k=0, k\neq i}^{n} (X - a_k)$.

iii) Pour $i, j \in \{0, \cdots, n\}$, calculer $L_i(a_j)$.

iv) Justifier que la famille $\mathcal{L} = (L_0, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

v) Soit $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, exprimer les coordonnées $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ de P_f dans $\mathcal{L}$ à l'aide des valeurs de f et L_i en a_i.

vi) On pose $I(f) \ = \ \int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ et $J(f) \ = \ \int_{-1}^{1} P_f(t)\,dt$. Montrer que

$$J(f) \ = \ \sum_{i=0}^{n} \omega_i f(a_i), \tag{7}$$

où $(\omega_i)_{i=0}^{n}$ sont des réels que l'on exprimera en fonction des L_i et des a_i.

vii) Montrer que la formule de quadrature est au moins d'ordre n.

viii) Montrer que la formule de quadrature est d'ordre $2n+1$. **Indication :** Pour $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$, on effectuera la division euclidienne de Q par P_{n+1} (: le polynôme de Legendre de degré $n+1$).

ix) Etablir que les $\omega_i > 0 \; \forall i \in \{0, .., n\}$.

Exercice 9. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1, 1] \to$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ et $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\,dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n-ème polynôme de Legendre).

On note $M = \displaystyle\sup_{t \in [-1,1]} \left| f^{(2n+2)}(t) \right|$.

i) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \tag{8}$$

ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \tag{9}$$

iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

iv) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).