Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°3 : rappels et compléments de calcul différentiel et d'optimisation

Exercice 1. Calculer toutes les dérivées partielles d'ordres 1 et 2 des fonctions suivantes, puis calculer le vecteur gradient et la matrice hessienne au point indiqué:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y + y^2x + e^{xy}, \text{ Point : } (0,1), \\ g(x,y,z) &= \cos(xy) + x^2y^3z^4, \text{ Point : } (0,1,2). \end{aligned}$$

Exercice 2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$, et la fonction g définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

si $(x,y) \neq (0,0)$ et $g(0,0) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|f(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

et

$$|g(x,y)| \leq C(x^2+y^2)$$

2. En déduire que f et g sont deux fonctions différentiables sur $\mathbb{R}^2$. On distinguera le cas du point $(0,0)$ des autres points de $\mathbb{R}^2$.

3. .La fonction f (respectivement g) est-elle C^1 en $(0,0)$?

Exercice 3.

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$h(x,y,z) = xyz + yz + xz + xy$$

1. Montrer que le seul point de $\mathbb{R}^3$ où le matrice hessienne de h est semi-définie positive est le point $(-1,-1,-1)$.
2. Montrer que h ne possède aucun minimum local sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq y \leq 1\}$. On considère la fonction f définie sur D par:

$$f(x,y) = (y-x)^2 + 6xy$$

1. Montrer que f est bornée sur D et atteint ses bornes.
2. Déterminer les points critiques de f (c'est à dire les points où $\nabla f(x)$ est nul) sur $D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 < x < y < 1\}$.
3. Montrer qu'on peut écrire f sous la forme suivante:
$$\forall x \in D, \quad f(x,y) = \frac{3}{2}(y+x)^2 - \frac{1}{2}(y-x)^2 \tag{1}$$
4. Représenter dans le plan les lignes de niveau de f à savoir les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f prend une valeur constante.
5. Montrer que pour tout $(x,y) \in D$, on a $-2 \leq f(x,y) \leq 6$
6. En déduire l'ensemble des points de D où f atteint ses bornes.
7. Montrer que le point origine O n'est pas un extremum local de f sur D à savoir
$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists (X_1, X_2) \in D^2, \quad ||X_1|| < \epsilon, \quad ||X_2|| < \epsilon \quad \text{et} \quad f(X_1) < f(O) < f(X_2)$$

Exercice 5.

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par la relation:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 + xy$$

1. Montrer que la fonction g est coercive.

2. Montrer que la fonction g est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que g possède un unique minimum sur $\mathbb{R}^2$ et le déterminer.

4. Déterminer le minimum de g sur $X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x + y = 3\}$.

5. Soit l'ensemble $X_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \quad x^2+y^2 \leq 4 \text{ et } x+y \geq 2\}$. Montrer que X_2 est convexe et compact. Déterminer le minimum et le maximum de g sur X_2.

Exercice 6.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique dfinie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction J de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$$

On note $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

1. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda_1 ||x||^2 \leq < Ax, x >$$
En déduire que J est une application coercive.

2. Calculer le gradient de J puis la hessienne de J en tout point $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Montrer que J posèsde un unique minimum x^* sur $\mathbb{R}^n$ caractérisé par la condition $Ax^* = b$.

4. Soit $\alpha > 0$. On considère la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = x_k - \alpha(Ax_k - b)$$
Montrer que
$$\boldsymbol{x}_{k+1} - x^* = (I - \alpha A)(x_k - x^*)$$
où I désigne la matrice identité de taille n.

5. Calculer les valeurs propres de la matrice $I - \alpha A$. En déduire que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^* lorsque $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$.