Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°4 : méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Supposons que les nombres soient représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.

2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.

3. Conclure.

Exercice 2.

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on déterminera.

2. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 3. Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe

   - une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité (*i.e.* $L_{i,i} = 1$),
   - une matrice triangulaire supérieure S à diagonale unité,
   - une matrice diagonale D

   telles que
   $$A = LDS. \tag{1}$$

2. Montrer que cette décomposition est unique.

3. Montrer que si A est symétrique, la décomposition (1) devient :
   $$A = LDL^T.$$

4. Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive.

5. Montrer que si la matrice A est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser A sous la forme
   $$A = B\tilde{B}^T,$$
   où B est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{B}$ une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à cette colonne changée de signe.

6. Appliquer cette factorisation à
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

Le but de l'exercice est de montrer que si A a une structure bande c'est-à-dire si il existe $p \in \{0, .., n-1\}$ tel que $A_{i,j} = 0$ pour tout i, j tel que $|i-j| > p$ alors il en est de même pour L et U.
Remarque: A est nulle en dehors des $2p+1$ diagonales centrales et A a la forme suivante:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & - & a_{1,p+1} & & 0 & \cdots & 0 \\ | & \ddots & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & \ddots & & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & \ddots & & \ddots & & a_{n-p,n} \\ \vdots & \ddots & & \ddots & & \ddots & | \\ 0 & \cdots & 0 & & a_{n-p,n} & - & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On fixe l'indice k tel que $\underline{k \geq p+2}$, alors A vérifie A_{kj} et A_{jk} sont nuls pour j compris entre 1 et $k-(p+1)$.

1. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de L, on a : $L_{kj} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

2. Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ colonne de U, on a $U_{jk} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

Exercice 5.

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{||v||^2} v^t v$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par la matrice I_n.

1. Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ (matrices orthogonales et symétriques).

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||x|| = ||y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Préciser la construction de P et R.

4. Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant une factorisation $A = QR$, avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, en $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$ opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions ou racines carrées).