Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n^{o}5 : méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle définie positive ?
2) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
3) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
2) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 3.

1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si B est inversible alors

$$\rho(A) = \rho(B^{-1}AB). \tag{1}$$

2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $(I + B)$ est inversible.

(a) Montrer que $B(I+B)^{-1} = I - (I+B)^{-1}$ et que $B(I+B)^{-1}$ est symétrique.

(b) Montrer l'équivalence suivante:

$$\rho(B(I+B)^{-1}) \ < \ 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}I + B \text{ est définie positive.} \qquad (2)$$

(Indication: On pourra exprimer les valeurs propres de $B(I+B)^{-1}$ en fonction de celles de B.)

Dans toute la suite de l'exercice, on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On décompose A sous la forme

$$A \ = \ rI + H + V \qquad (3)$$

où r est un réel strictement positif, H et V sont des matrices symétriques telles que $rI + H$ et $rI + V$ sont inversibles.
Pour la résolution du système $Ax = b$, on considère la méthode itérative définie par la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ est donné, et pour tout } k \in \mathbb{N} \\ \text{on pose } y_k \text{ tel que } (rI + H)y_k = -Vx_k + b, \\ (rI + V)x_{k+1} = -Hy_k + b. \end{array} \right. \qquad (4)$$

3) Montrer que la méthode itérative (4) converge si et seulement si

$$\rho(L) \ < \ 1 \quad \text{où} \quad L \ = \ (rI + V)^{-1}H(rI + H)^{-1}V \qquad (5)$$

4) On pose $B = \frac{1}{r}H$ et $C = \frac{1}{r}V$.

(a) Exprimer la matrice L en fonction de B et C.

(b) En utilisant le fait que $|||M|||_2 = \rho(M)$ pour toute matrice carré M symétrique, montrer que

$$\rho(L) \ \leq \ \rho(B(I+B)^{-1})\rho(C(I+C)^{-1}). \qquad (6)$$

5) En déduire que si $\frac{r}{2}I + H$ et $\frac{r}{2}I + V$ sont définies positives, la méthode itérative (4) converge.

6) Déterminer alors la limite de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4. Méthode du gradient à pas constant Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, dont toutes les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont réelles et b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On désigne par x la solution du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$ est donné et par $\lambda_1, .., \lambda_n$ les valeurs propres de A.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(I) \quad \begin{cases} x^0 \text{donné}, & x^{(k+1)} = x^k - \alpha r_k \\ \text{où } r_k = A(x^{(k)}) - b \end{cases} \tag{7}$$

1) Déterminer la matrice $B_\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ et le vecteur c tels que

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$$

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode (I) converge, en fonction des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.
3) Montrer que si les valeurs propres de A ne sont pas de même signe, la méthode ne converge pas.
4) On suppose dans la suite de l'exercice que toutes les valeurs propres de A sont positives.

a) Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < C$ où C est à déterminer en fonction des valeurs propres de A.

b) On pose $f_i : \alpha \in \mathbb{R}^+ \to f_i(\alpha) = |1-\alpha\lambda_i|$. Représenter graphiquement les courbes des $f_1, .., f_n$ sur une même figure.

c) En déduire le paramètre α optimal, noté α_{opt}, pour lequel la méthode converge la plus vite.

d) On suppose que A est symétrique. Calculer alors, $\rho(B_{\alpha_{\text{opt}}})$, en fonction de $k_2(A)$ (conditionnement de la matrice A pour la norme $\||\| \cdot \||_2$). Que dire de la méthode si la matrice A est mal conditionnée ?