Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°6 : méthodes de quadrature

Exercice 1. Formule d'Euler Mac-Laurin et méthode des trapèzes

1. Soit $f \in C^{n+1}([0,1],\mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(0)+f(1)\right] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x)dx + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)dx$$

où les famille $(P_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence:

$$P_1(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 0$$

et

$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (\alpha_j - P_j(t))dt \quad \text{et} \quad \alpha_{j+1} = \int_0^1 P_{j+1}(t)dt, \quad (j \in \mathbb{N}^*)$$

(*on pourra raisonner par récurrence sur* n).

2. Montrer de plus que $\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad \text{et} \quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.

3. Soit $f \in C^{2n+2}([a,b],\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \frac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = T_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2n+2)}(x)dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbb{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0,1[$ et

$$T_k = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a+jh)\right].$$

4. En déduire que la méthode des trapèzes appliquée à l'intégrale de période d'une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, 1-périodique, est d'ordre $2n+2$, à savoir:

$$\int_0^1 f(t)dt = h\left[\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(jh)\right] + O(h^{2n+2})$$

Exercice 2. Autour de la méthode de Simpson

1. Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a,a[,\mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi)$$

(Indication: considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{\alpha}{180}t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

2. Soit $f \in C^5([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a,b],\mathbb{R})$.

3. a) Donner la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4.\frac{1}{6}(\frac{1}{1+0^2} + 4.\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0,1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π.

Exercice 3. Noyau de Peano

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x-t)_+)^n = (max(x-t,0))^n$$

1. Représenter graphiquement les fonction f^1_{-1}, f^2_0 et f^1_1.

2. Pour toute fonction réellle f, on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1,1]$:

$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$

   On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.

3. Calculer explicitement la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par:

$$K(t) = E(f_t^N)$$

   avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).

   On distinguera les cas $t \in]-1,1[$ et $t \notin]-1,1[$.

4. Montrer le résultat général suivant: on considère une méthode de quadrature sur un intervalle borné $]\alpha, \beta[$, à $(n+1)$ points tous situés dans un segment:

$$]\alpha, \beta[\cup \{x_0, ..., x_n\} \subset I = [a, b].$$

   On suppose que la méthode est d'ordre $N \in \mathbb{N}$. Alors, on a

$$\forall f \in C^{(N+1)}([a,b], \mathbb{R}), \quad E(f) = \frac{1}{N!} \int_a^b K_N(t) f^{(N+1)}(t) dt \qquad (1)$$

   où on a noté pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$:

$$K_n(t) = E(x \mapsto (x-t)_+^n)$$

   et

$$E(f) = \int_\alpha^\beta f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

5. Que donne le résultat précédent avec la méthode des trapèzes et le calul effectué précédemment?

Exercice 4. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ et $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\,dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n-ème polynôme de Legendre).

On note $M = \displaystyle\sup_{t\in[-1,1]} \left|f^{(2n+2)}(t)\right|$.

1. Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que
$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \tag{1}$$

2. Démontrer de même que
$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \tag{2}$$

3. En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

4. Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

5. Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).