Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

*TD n$^o$7 : résolution numérique d'équations différentielles*

**Exercice 1.** <u>Lemme de Gronwall discret:</u> Soit $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant

$$\alpha_{n+1} \ \leq \ (1+A)\,\alpha_n + B \quad \forall n \in \{0,..,N-1\}, \tag{1}$$

où $A > 0$ et $B \geq 0$ sont des constantes indépendantes de $n$, montrer que

$$\alpha_n \ \leq \ e^{nA}\,\alpha_0 + \frac{e^{nA}-1}{A} B \quad \forall n \in \{0,..,N\}. \tag{2}$$

**Exercice 2.** Soit le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0+T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé}. \end{cases} \tag{2}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (2) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction $f$ est continûment différentiable de $[t_0, t_0+T]\times\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et est globalemement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté $L$ pour la norme choisie sur $\mathbb{R}^m$:

$$\forall t \in [t_0, t_0+T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad ||f(t,y_2) - f(t,y_1)|| \leq L||y_2 - y_1||$$

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $\Delta T L < 1$ la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suivante:

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé}, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

   est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

2. On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + \Delta T L_1)(||e_n|| + ||\epsilon_n||)$$

où $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$ et $\epsilon_n$ désigne l'erreur de consistance:

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

3. En déduire

$$||e_n|| \leq e^{L_1 n\Delta T}||e_0|| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T}(1 + \Delta T L_1)||\varepsilon_i||$$

puis la convergence de la méthode d'Euler implicite:

$$\lim_{N \to +\infty, y_0 \to y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} ||e_n||) = 0$$

(pour simplifier, on pourra supposer que $f$ est $C^1$ et en déduire une majoration de $||\epsilon_n||$ en $O(\Delta T)^2$).

**Exercice 3.**

Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

1. Déterminer la solutution du système précédent qui passe par le point $(x_0, y_0)$ au temps $t = 0$.

2. On utilise la méthode d'Euler explicite pour approcher la solution exacte sur un intervalle $[0, T]$ avec pas constant $h = \frac{T}{N}$, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit $(x_n, y_n)$ le point atteint au temps $t_n = nh$ $(n \in [0, N])$

   (a) Ecrire la relation qui lie $(x_{n+1}, y_{n+1})$ à $(x_n, y_n)$.

   (b) Calculer explicitement $(x_n, y_n)$ en fonction de $n$, $h$, $x_0$, $y_0$. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1 + 2h)^n}$.

(c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée converge vers la solution exacte au sens énoncé dans le cours, c'est à dire:

$$\lim_{N\to+\infty} \max(\{|x_n - x(t_n)|, 0 \leq n \leq N\}) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \leq n \leq N\})$$

3. Proposer (et écrire) un schéma numérique plus précis que celui présenté ici.

**Exercice 4.** On étudie la méthode numérique $(M)$ de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_{n+1} & = & y_n + h_n \phi(x_n, y_n, h) \\ \phi(x, y, h) & = & \alpha f(x, y) + \beta f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)) + \gamma f(x + h, y + h f(x, y)), \end{array} \right.$$

où $\alpha, \beta$ et $\gamma$ sont des réels compris entre 0 et 1.

1. Pour quelles valeurs du triplet $(\alpha, \beta, \gamma)$ retrouve-t-on
   - la méthode d'Euler?
   - la méthode du point milieu?
   - la méthode de Heun?
2. Dans cette question et la suivante on supposera que la fonction $f(t, y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathcal{R}$ et vérifie une condition de Lipschitz globale. Pour quelles valeurs de $(\alpha, \beta, \gamma)$ la méthode proposée est-elle stable?
3. Quelles relations doivent satisfaire $(\alpha, \beta, \gamma)$ pour que la méthode soit
   • consistante ? • convergente ? • d'ordre 1 ? • d'ordre 2 ?
4. La méthode $(M)$ peut-elle être d'ordre supérieur à 2 ?

**Exercice 5.** On considère l'équation différentielle du second ordre avec conditions initiales

$$(E) \qquad y''(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in [0, T], \qquad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

où $f \in \mathrm{C}^2([0, T] \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, $y_0, y'_0 \in \mathbb{R}$. On discrétise l'équation par le schéma

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = h^2 f(t_n, y_n), \qquad n \geq 1$$

où $t_n = nh$, $h = T/N$. Majorer l'erreur de consistance

$$\eta(y, h) = \sup_{h \leq t \leq T-h} |f(t, y) - \frac{y(t+h) - 2y(t) + y(t-h)}{h^2}|.$$

**Exercice 6.** Soit le problème de Cauchy $y' = f(t, y), y(0) = y_0$, avec $f : [0, T] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à $y$, uniformément en $t$. Etudier la consistance et la stabilité de la méthode de Heun

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)\right], \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$

**Exercice 7.** On s'intéresse au problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5}$$

où $f$ est $C^2$ de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté $L$.

1. On s'intéresse à l'inéquation valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\Theta_{n+1} \leq \Theta_{n-1} + 2hL\Theta_n + \alpha_n$$

   où $h >$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Theta_n$ et $\alpha_n$ sont des réels positifs. Montrer que

   $$\sqrt{\Theta_{n+1}^2 + \Theta_n^2} \leq e^{hL} \sqrt{\Theta_n^2 + \Theta_{n-1}^2} + \alpha_n,$$

   On pourra commencer par vérifier que la matrice $\begin{pmatrix} 2hL & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $|||A|||_2 \leq e^{hL}$.

2. En déduire une majoration de $\Theta_n$ en fonction de $\Theta_0$, $\Theta_1$, $h$, $L$, $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n-1}$.

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \dfrac{T}{N}$. On définit la suite $(y_n)_{0\leq n\leq N}$ suivante:

$$\begin{cases} y_0 = y(0) \\ y_1 = y_0 + hf(0, y_0) \\ y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(nh, y_n), \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{cases} \tag{6}$$

   Majorer l'erreur de consistance du schéma: $\epsilon_0 = y(h) - y(0) - hf(0, y(0))$ et si $1 \leq n \leq N-1$:

$$\epsilon_n = y((n+1)h) - y((n-1)h) - 2hf(nh, y(nh))$$

   en fonction de $M_2 = ||y^{(2)}||$ et $M_3 = ||y^{(3)}||$.

4. Montrer que

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(nh)| \leq Ch^2$$

   où la constante $C$, à déterminer, dépend de $M_2$, $M_3$ $L$ et $T$.

**Exercice 8.**

On s'intéresse à nouveau au problème de Cauchy, noté (5), défini à l'exercice précédent où cette fois $f$ est $C^4$ de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté $L$. On définit pour tout $k \in \{0, ...4\}$ la dérivée totale de $f$, notée $f^{[k]}(t, x)$ par les formules: $f^{[0]} = f$ et

$$f^{[k+1]}(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} f^{[k]}(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f^{[k]}(t, x).f(t, x)$$

On considère le schéma numérique à pas constant $h = \frac{T}{N}$ suivant:

$$y_{n+1} = y_n + hF(nh, y_n, h) \tag{7}$$

avec

$$F(t, x, h) = f(t, x) + haf^{[1]}(t, x) + h^2 bf^{[2]}\left(t + \alpha h, x + \beta hf(t, x)\right)$$

où $\alpha$, $\beta$, $a$ et $b$ sont des paramètres à déterminer.

1. On suppose que $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$ sont aussi Lipschitziennes par rapport à $x$ uniformément en $t$ avec constantes $L_1$ et $L_2$ respectivement. Démontrer qu'il existe une constante $\Lambda > 0$ indépendante de $h$ telle que

$$|F(t,x,h) - F(t,x^*,h)| \leq \Lambda |x - x^*|$$

pour tous $x$ et $x^*$ dans $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les coefficients $\alpha$, $\beta$, $a$ et $b$ de manière que la méthode à un pas définie par la relation (7) soit d'ordre 4.

**Exercice 9.**

On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau:

$$\begin{array}{cc|ccc} & 0 & 0 & & \\ (M2) & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ (M3) & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ (M) & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3) et donner leur ordre.

2. Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.

3. La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2?