Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TP n^{o}3 : le Laplacien discrétisé

On souhaite discrétiser le problème

$$(L) \left\{ \begin{array}{l} -y" = f \\ y(a) = y(b) = 0 \end{array} \right.$$

où f est donnée sur $[a,b] = [x_0, x_{n+1}]$.

On pose $x_i = x_{i-1} + h$ $(1 \leq i \leq n+1)$. avec de plus $x_{i+1/2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. On approche la dérivée $y'(x_{i+1/2})$ par

$$y'(x_{i+1/2}) \quad \simeq \quad \frac{(y(x_{i+1}) - y(x_i))}{h},$$

et la dérivée seconde $y"(x_i)$ par

$$y"(x_i) \quad \simeq \quad \frac{(y'(x_{i+1/2}) - y'(x_{i-1/2}))}{h}.$$

On obtient alors une discrétisation du problème $-y" = f$ par le schéma suivant:

$$\forall i \in [|1,n|] \quad \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{h^2} \; = \; f(x_i), \tag{1}$$

où y_i représente une approximation de $y(x_i)$ pour tout i dans $[|1,n|]$ avec de plus $y_0 = y(x_0) = 0,\ y_{n+1} = y(x_{n+1}) = 0$.

Le problème discrétisé (1) s'écrit matriciellement sous la forme:

$$AY = h^2 F$$

où $Y = [y_1, .., y_n]^T$, $F = [f(x_1), .., f(x_n)]$ et où la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défnie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Proposer un code Scilab permettant de résoudre le problème (L) à partir de la discrétisation (1) pour une fonction f et un pas h quelconques. Pour résoudre le système linéaire, on pourra utiliser une routine de base ou reprogrammer une méthode au choix (Cholesky ou Gauss Seidel par exemple).

2. Vérifier la précision de l'approximation dans le cas où $[a, b] = [0, 1]$ et $f(x) = \sin(\pi x)$ pour lequel il existe une solution exacte simple.