Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°10 : Equations différentielles, méthode d'Euler

Exercice 1. Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

i) Déterminer la solution du système précédent qui passe par le point (x_0, y_0) au temps $t = 0$.

ii) On utilise la méthode d'Euler explicite pour approcher la solution exacte sur un intervalle $[0, T]$ avec pas constant $h = \frac{T}{N}$, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit (x_n, y_n) le point atteint au temps $t_n = nh$ ($n \in [0, N]$)

(a) Ecrire la relation qui lie (x_{n+1}, y_{n+1}) à (x_n, y_n).

(b) Calculer explicitement (x_n, y_n) en fonction de n, h, x_0, y_0. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1+2h)^n}$.

(c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée converge vers la solution exacte au sens suivant :

$$\lim_{N\to+\infty} \max(\{|x_n - x(t_n)|, 0 \le n \le N\}) \quad \text{et} \quad \lim_{N\to+\infty} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \le n \le N\})$$

Exercice 2.

On souhaite appliquer la méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:

$$y'(t) = -150y(t) + 50$$

avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3}$.

i) En prenant une subdivision régulière de 100 points et une valeur initiale $y_0 = 0.3$, que vaut la valeur approchée obtenue pour $y(1)$ par cette méthode ? On pourra remarquer que la suite étudiée est de type arithmetico-géométrique.

ii) Comparer avec la valeur exacte et commenter le résultat. Quel nombre de points préconisez vous pour obtenir une bonne approximation de $y(1)$?

Exercice 3. Soit le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \quad t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé.} \end{cases} \tag{1}$$

L'existence et l'unicité de $y \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$ vérifiant (1) sont bien assurées en supposant par exemple que la fonction f est continûment différentiable de $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ et est globalemement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L pour la norme choisie sur $\mathbb{R}^m$:

$$\forall t \in [t_0, t_0+T], \quad \forall (y_1, y_2) \in (\mathbb{R}^m)^2, \quad ||f(t, y_2) - f(t, y_1)|| \leq L||y_2 - y_1||$$

i) Soit $N \in |||$. On note $\Delta T = \frac{T}{N}$. Montrer, en utilisant un théorème de point fixe rappelé clairement, que si $\Delta T L < 1$ la suite $(y_n)_{0 \leq n \leq N}$ suivante :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé}, \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

est bien définie (on parle de la méthode d'Euler implicite).

ii) On note $t_n = t_0 + n\Delta T$ et $e_n = y_n - y(t_n)$. Montrer que

$$||e_{n+1}|| \leq (1 + \Delta T L_1)(||e_n|| + ||\epsilon_n||)$$

où $L_1 = \frac{L}{1 - L\Delta T}$ et ϵ_n désigne l'erreur de consistance :

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T f(t_{n+1}, y(t_{n+1}))$$

iii) En déduire

$$e_n \leq e^{L_1 n \Delta T} e_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{L_1(n-1-i)\Delta T}(1 + \Delta T L_1)\varepsilon_i$$

puis la convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\lim_{N \to +\infty, y_0 \to y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} e_n) = 0$$

(pour simplifier, on pourra supposer que f est C^1 et en déduire une majoration de ϵ_n en $O(\Delta T)^2$).