Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°12 : méthodes de Runge Kutta

Exercice 1.

On considère une méthode de Runge Kutta générale donnée par le tableau de ses coefficients :

$$
\begin{array}{cccccc}
c_1 & 0 & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & 0 & & & \\
c_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & 0 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\
c_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \dots & a_{q-1,q} & 0 \\
-- & & - & & -- & \\
1 & b_1 & b_2 \dots & & b_{q-1} & b_q
\end{array}
$$

On suppose qu'on a

$$\forall i \in \{1, ..., q\}, \quad c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}$$

et

$$1 = \sum_{j=1}^{q} b_j$$

On rappelle que sous ces conditions, la méthode est consistante, stable et donc convergente.

Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle soit d'ordre 2 (si f est C^2) est que ses coefficients vérifient en outre :

$$\sum_{j=1}^{q} b_j c_j = \frac{1}{2}$$

Exercice 2.

On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & 0 & 0 & & \\
(M2) & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\
(M3) & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
- & - & - & - & - \\
(M) & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}
\end{array}
$$

i) Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3) et donner leur ordre.

ii) Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.

iii) La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2 ?

Exercice 3.

On considère une méthode de quadrature (M) sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 f(u)du \simeq af(0) + bf(\frac{1}{3}) + cf(\frac{1}{2})$$

i) Déterminer les coefficients a b et c pour que la méthode soit d'ordre 2.

ii) On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & 0 & 0 & & \\
(M2) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\
(M3) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\
- & - & - & - & - \\
(M) & 1 & a & b & c
\end{array}$$

(a) Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3) et donner leur ordre.

(b) Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.

(c) La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2 ?