TD 13: optimisation d'une fonctionnelle quadratique avec contraintes

L'objectif général de ce TD est d'étudier la convergence de trois algorithmes de recherche de minimum local avec contraintes : le gradient projeté, la méthode de pénalisation et l'algorithme d'Uzawa pour un cas particulier.

Dans tout le TD, on s'intéresse à la minimisation d'une fonction quadratique $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que

$$J(x) = \frac{1}{2}\,{}^t x A x - {}^t b x$$

avec A une matrice symétrique définie positive de taille n et $b \in \mathbb{R}^n$, sous la contrainte

$$Cx = d$$

avec C une matrice de taille $p \times n$ ($p < n$), de rang maximal p et $d \in \mathbb{R}^p$.

On note $0 < \lambda_1 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A.

Exercice 1 (*étude théorique*)

1. Montrer que J admet un unique minimum global x^* sur $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n,\, Cx = d\}$.
2. Montrer qu'il existe un unique $\lambda^* \in \mathbb{R}^p$ tel que

$$\begin{cases} Ax^* + {}^tC\lambda^* = b \\ Cx^* = d \end{cases}$$

Exercice 2 (*méthode de pénalisation*)

On considère la fonction pénalisée :

$$J_\rho(x) = J(x) + \frac{\rho}{2}||Cx - d||^2$$

o $\rho > 0$ est un paramètre de pénalisation.

1. Montrer que J_ρ possède un unique minimum x_ρ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que pour tout $\rho > 0$, on a $J(x_\rho) \leq J(x^*)$.
3. En déduire que la famille $(x_\rho)_{\rho>0}$ est bornée.
4. Montrer que la seule valeur d'adhérence possible de toute suite $(x_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n \to +\infty$ est égale à x^*.
5. En déduire que toute suite $(x_{\rho_n})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n \to +\infty$ tend vers x^*.

Exercice 3 (*méthode du gradient projeté*)

On note P_Ω la projection de $\mathbb{R}^n$ sur le convexe fermé Ω, c'est à dire que $P_\Omega(x) \in \Omega$ et

$$||x - P_\Omega(x)|| = \min_{v \in \Omega} ||x - v||$$

1. Montrer que x^* est tel que

   $$\forall v \in \Omega, \quad < \nabla J(x^*), v - x^* > \geq 0$$

   En déduire que pour tout $\rho > 0$,

   $$x^* = P_\Omega(x^* - \rho \nabla J(x^*))$$

2. On considère l'algorithme du gradient projeté à pas constant : partant de $u_0 \in \mathbb{R}^n$, on construit la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

   $$u_{k+1} = P_\Omega(u_k - \rho \nabla J(u_k))$$

   Montrer que si $\rho < \frac{2}{\lambda_n}$, alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^*.

Exercice 4 (*méthode d'Uzawa*)

On considère l'algorithme suivant : soit $\lambda_0 \in \mathbb{R}^p$ et $\rho > 0$. On construit les suites $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ainsi : $Au_0 = b - {}^tC\lambda_0$ puis

$$\begin{cases} \lambda_{k+1} = \lambda_k + \rho(Cu_k - d) \\ Au_{k+1} = b - {}^tC\lambda_{k+1} \end{cases}$$

1. Montrer que

   $$||\lambda_{k+1} - \lambda^*||^2 \leq ||\lambda_k - \lambda^*||^2 + (\rho^2 ||C||^2 - 2\rho\lambda_1)||u_k - x^*||^2$$

2. En déduire qu'il existe $\rho_1 > 0$ tel que si $\rho < \rho_1$, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers x^*.