Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n°2 : résolution de systèmes non linéaires

Exercice 1. (méthode de Newton modifiée)

On suppose que $\bar{x}$ est un zéro de f de multiplicité $m > 0$. Montrer que la méthode basée sur la formule

$$x_0 \in V \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - m\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

permet de construire une suite convergeant vers $\bar{x}$ de manière quadratique.

Exercice 2. (méthode de Newton améliorée)

On suppose que $\bar{x}$ est un zéro de f de multiplicité $m = 1$ ou 2. Montrer que la méthode basée sur la formule

$$x_0 \in V \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

permet de construire une suite convergeant vers $\bar{x}$ de manière quadratique.

Exercice 3. (méthode de Newton généralisée en dimension un)

Soit I un intervalle de d'intérieur non vide , $x_0 \in I$ et $c > 0$ tel que $J = [x_0 - c, x_0 + c]$ soit inclus dans I. Soit f une fonction réelle dérivable sur I et $\lambda > 0$ tel que

$$\begin{cases} (i)|f(x_0)| \leq \dfrac{c}{2\lambda}. \\ (ii)\forall (x,y) \in J^2,\ |f'(x)| \geq \dfrac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad |f'(x) - f'(y)| \leq \dfrac{1}{2\lambda}. \end{cases}$$

i) Montrer que f admet un unique zéro $\bar{x}$ dans J.

ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque dans J, montrer qu'on peut définir une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans J telle que

$$x_0 \in J \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(u_n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Démontrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \bar{x}$ et $\exists c > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |\bar{x} - x_n| \leq c2^{-n}$.

Exercice 4. (estimation de l'erreur pour la méthode de la fausse position)

i) On considère une fonction $f \in C^2([a,b],)$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et f' possède un signe constant sur $[a,b]$. On note correctement $\bar{x}$ l'unique zéro de f dans $[a,b]$. Soit

$$\rho = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Montrer qu'il existe des réels c et d dans $]a, b[$ tels que

$$\rho - \bar{x} = \frac{1}{2} \frac{f''(c)}{f'(d)} |(\rho - a)(\rho - b)|.$$

ii) On construit une suite de segments emboités $[a_n, b_n]$ par la méthode de la fausse position (voir paragraphe 3.3) pour la fonction f précédente (avec $a_0 = a$ et $b_0 = b$). Montrer que

$$b_n - a_n \leq \frac{4m}{M} \left[\frac{M}{4m} (b - a) \right]^{2^n}$$

avec $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$ et $m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.