Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2019/2020
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TD n^{o}5 : méthodes directes de résolution de systèmes linéaires (partie 2/2)

Exercice 1. Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 2. Pour N entier, on définit la matrice tridiagonale d'ordre N (matrice du Laplacien discrétisé):

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_4.
2. Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_N.

Exercice 3.

Soit $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. On note $H(v) \in$ la matrice (dite de Householder)

$$H(v) = I_n - \frac{2}{||v||^2} v^t v$$

et $\mathcal{H}$ l'ensemble de telles matrices complété par la matrice I_n.

1. Montrer que $H(v) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$ (matrices orthogonales et symétriques).

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||x|| = ||y||$. Montrer qu'il existe $H \in \mathcal{H}$ tel que $Hx = y$.

3. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $(n-1)$ matrices de $\mathcal{H}$ tel que $PA = R$ soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Préciser la construction de P et R.

4. Proposer un algorithme basé sur les matrices de Householder donnant une factorisation $A = QR$, avec Q matrice orthogonale et R matrice triangulaire, en $\frac{4}{3}n^3 + O(n^2)$ opérations élémentaires (additions, multiplications, divisions ou racines carrées).