Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

*TD n°7 : recherche de valeurs propres*

Ce TD propose d'étudier trois textes de modélisation et d'en démontrer les principales propriétés mathématiques.

**Exercice 1.** le modèle de Leontieff
Démontrer le résultat suivant (Perron Frobenius):

**Notations :** Si $M$ est une matrice (ou un vecteur), on notera $M \geq 0$ si tous les coefficients de $M$ sont positifs. Si de plus $M \neq 0$, on notera $M \gneq 0$. Si tous les coefficients de $M$ sont strictement positifs, on écrira $M > 0$. Enfin, si $M$ est une matrice carrée, on notera $\rho(M)$ son rayon spectral.

**2. Le modèle fermé**

Considérons d'abord, pour simplifier, le cas du modèle dit *fermé*, dans lequel il n'y a pas de demande externe, c'est-à-dire que tous les biens produits sont consommés par les différents secteurs. Ceci revient à poser $c = 0$ dans (1), et donne :

$$Ax = x. \tag{2}$$

On se demande donc si $A$ admet 1 comme valeur propre. Mais il faut, de plus, s'assurer qu'une solution $x \gneq 0$ existe. Comme la matrice $A$ est positive, l'étude proposée relève du théorème suivant de Perron-Frobenius.

**Théorème 1.** *Si $M$ est une matrice carrée telle que $M \geq 0$, alors $\rho(M)$ est une valeur propre de $M$ et il existe un vecteur propre $x \gneq 0$ pour cette valeur propre.*

**Exercice 2.** le modèle de Leslie
Soit $A$ une matricet primitive, c'est à dire telle que $A \geq 0$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k > 0$. On rappelle tout d'abord le résultat suivant (Perron Frobenius pour une matrice primitive):

**Théorème 1** (Perron-Frobenius). *Si A est une matrice carrée telle que $A \geq 0$, alors $\rho(A)$ est une valeur propre de A et il existe un vecteur propre $e \gneq 0$ pour cette valeur propre.*

*Si, de plus, A est primitive alors :*

- *La valeur propre $\rho(A)$ est strictement positive et algébriquement simple.*
- *Il existe un vecteur propre associé e tel que $e > 0$.*
- *La matrice A n'a pas d'autres vecteurs propres $x \gneq 0$ que les multiples positifs de e.*
- *Toutes les autres valeurs propres $\lambda$ de A vérifient $|\lambda| < \rho(A)$.*

Démontrer le corollaire 1:

**Corollaire 1.** *Soit A une matrice positive et primitive.*

- *Si $z \gneq 0$ vérifie $Az \geq \rho(A)z$, alors on a $z > 0$ et $Az = \rho(A)z$.*
- *Pour toute matrice positive B vérifiant $B \lneq A$ (resp. $B \gneq A$), on a $\rho(B) < \rho(A)$ (resp. $\rho(B) > \rho(A)$).*

**Exercice 3.** la matrice de Google

On considère une matrice $A$ dont tous les coefficients sont strictement positifs et dont la somme de chaque colonne vaut 1. On admet par le théorème de Perron Frobénius (voir exercice précédent) que $\rho(A) = 1$ et que cette valeur propre est simple associée à un vecteur propre à composantes strictement positives. Démontrer le résultat rappelé dans le texte.

On part d'un vecteur initial $r^0 \neq 0$, et l'on procède à l'itération

(5) $$q^k = Ar^{k-1}, \quad r^k = \frac{q^k}{\|q^k\|_1},$$

avec $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^N |v_i|$. Si l'on choisit le premier vecteur $r^0$ à composantes positives, par exemple $r^0 = e$, cette méthode converge vers le vecteur propre recherché $r$. La vitesse de convergence est de l'ordre de $|\lambda_2|^k$ où $\lambda_2$ est la deuxième valeur propre de $A$, celles-ci étant classées par ordre de module décroissant.