Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°8 : Méthodes de quadrature (méthodes composées)

Exercice 1.

On considère une méthode de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(u)du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$

où α et β sont des réels donnés et u_0 et u_2 sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1,1]$.

i) Déterminer les constantes α et β et les points u_0 et u_2 pour que cette formule soit d'ordre 3.

ii) On admet que pour de telles valeurs de α, β, u_0 et u_2, si $f \in \mathcal{C}^4([-1,1],\mathbb{R})$, l'erreur entre l'intégrale exacte de f sur $[-1,1]$ et sa valeur approchée est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{360}||f^{(4)}||_\infty$$

Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0+h]$ (et non plus sur $[-1,1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.

iii) A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b$ et donner une majoration de l'erreur commise en fonction de a, b, n et de $||f^{(4)}||_\infty$.

Exercice 2. Une nouvelle formule d'intégration numérique : Posons pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$:

$$I(f) \;=\; \omega_a f(a) + \omega_b f(b) + \omega_a' f'(a) + \omega_b' f'(b). \tag{1}$$

i) Trouver ω_a, ω_b, ω_a' et ω_b' pour que $I(f)$ approchant $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ soit d' ordre 3. On supposera d'abord que $[a,b] = [-1,1]$ puis on se ramènera au cas général.

ii) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ défini par $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ est un isomorphisme. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(a) = f(a)$, $P_f'(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P_f'(b) = f'(b)$.

iii) On pose $E(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - I(f)$. Montrer que $E(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - P_f(x))\,dx$.

iv) On admet le résultat suivant : On suppose que $f \in C^4([a,b])$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}(x-a)^2(x-b)^2 f^{(4)}(\xi_x). \tag{2}$$

et tel que $x \to f^{(4)}(\xi_x)$ est continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^4([a,b]) \quad \exists \xi \in [a,b] \quad \text{tq.} \quad E(f) \;=\; C(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \tag{3}$$

v) Ecrire la formule de quadrature composée approchant $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire (1), où on a discrétisé le segment $[\alpha,\beta]$ en p segments égaux (on pose $h = \dfrac{(\beta-\alpha)}{p}$).

vi) Montrer que l'erreur de la formule composée est en $\mathcal{O}(h^N)$ où N est un entier que l'on déterminera.

Exercice 3.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x-t)_+)^n = (max(x-t,0))^n$$

i) Représenter graphiquement les fonction f_{-1}^1, f_0^2 et f_1^1.

ii) Pour toute fonction réellle f, on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1,1]$:

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$

On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.

iii) Calculer explicitement la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$K(t) = E(f_t^N)$$

avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).
On distinguera les cas $t \in]-1,1[$ et $t \notin]-1,1[$.

iv) Reprendre le calcul précédent en remplaçant la méthode des trapèzes par la méthode de Simpson élémentaire sur $[-1,1]$ (on veillera à calculer la nouvelle valeur de N).

Exercice 4. Autour de la méthode de Simpson

i) Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a,a[,\mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi)$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \dfrac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \dfrac{\alpha}{180}t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

ii) Soit $f \in C^5([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880}f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a,b],\mathbb{R})$.

iii) a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4.\frac{1}{6}(\frac{1}{1+0^2} + 4.\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0,1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π.