

TD n° : Polynômes orthogonaux et méthodes de quadrature de Gauss

Exercice 1. Polynômes orthogonaux

Soit $]a, b[$ un intervalle, borné ou non, de \mathbb{R} . Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a, b[\rightarrow]0, +\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale $\int_a^b |x|^n w(x) dx$ est convergente pour tout entier n .

L'espace vectoriel (E) des fonctions f continues sur $]a, b[$, telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx} < +\infty,$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) w(x) dx.$$

a) Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n) , $\deg(p_n) = n$, orthogonaux pour un poids donné w . Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n) p_{n-1}(x) - \mu_n p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{\langle xp_{n-1}, p_{n-1} \rangle}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \quad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

b) Montrer que les polynômes p_n sont scindés à racines simples, toutes dans $]a, b[$.

Exercice 2. Polynômes de Tchebichev

a) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b) Montrer que les polynômes t_n vérifient la relation de récurrence :

$$t_{n+1}(x) = 2x t_n(x) - t_{n-1}(x)$$

Exercice 3. Polynômes de Legendre On pose $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)$ et pour tout entier n on définit le polynôme P_n par

$$Q_n(X) = (X^2 - 1)^n, \quad P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} Q_n^{(n)}.$$

- i) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.
- ii) Justifier que (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
- iii) En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
- iv) Déterminer les racines de Q_n ainsi que leur multiplicité.
- v) Montrer que P_n a au moins n racines dans l'intervalle $] - 1, 1[$.
- vi) Donner le nombre exact de racines de P_n ainsi que leur multiplicité.
- vii) Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\int_{-1}^1 P^{(n+1)}(t)Q(t) dt = \sum_{k=0}^n \left[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t) \right]_{-1}^1 + (-1)^{n+1} \int_{-1}^1 P(t)Q^{(n+1)}(t) dt. \quad (1)$$

- viii) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\int_{-1}^1 P_n(t)Q(t) dt = 0$

Exercice 4. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{2n+2} .

On pose $I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$ et $J(f) = \int_{-1}^1 P_f(t) dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n -ème polynôme de Legendre).

On note $M = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n+2)}(t)|$.

- i) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n + 1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n + 3)!}. \quad (2)$$

- ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n + 2)!}. \quad (3)$$

- iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.
- iv) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).
- v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).