Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TP n^{o}2 : résolution de systèmes non linéaires

Cette séance traite de la résolution d'équations ou de systèmes d'équations l'aide des méthodes de dichotomie, de Newton et de la sécante.

Exercice 1. Montrer graphiquement que l'équation

$$\cos(x) - x = 0,$$

a une unique solution $x > 0$. Tester les trois méthodes: dichotomie, point fixe et Newton pour obtenir une valeur approchée de la solution.

Exercice 2. Comparer la vitesse de convergence des méthodes de dichotomie et de Newton sur l'exemple de l'équation $x^3 - x = 0$ sur l'intervalle $[0.5, 2]$.

Exercice 3.
Montrer graphiquement que le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x - y = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{array} \right.$$

a une unique solution (x, y) avec $x > 0$ et $y > 0$. Approcher cette solution avec la méthode de Newton.

Exercice 4. Le GPS est un système de positionnement basé sur le connaissance avec une grande précision de la distance du récepteur à trois satellites (situés à des orbites de l'ordre de $28\,000\,km$).

Le recepteur (assimilé à un point P) reçoit d'un satellite S_1 des informations permettant de calculer sa distance d_1 à ce satellite. Notons $\Omega_1(d)$ l'ensemble des points de la terre à la distance d_1 du satellite S_1. On sait donc que $P \in \Omega_1(d_1)$. L'utilisation d'un deuxième satellite permet de dire que $P \in \Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2)$. Comme l'intersection de "courbes de niveaux" $\Omega_1(d_1)$ et

$\Omega_2(d_2)$ n'est réduite à un seul point que dans le cas exceptionnel où ces courbes sont tangentes, l'utilisation d'un troisième satellite est nécessaire (et suffisante!) puisque

$$\Omega_1(d_1) \cap \Omega_2(d_2) \cap \Omega_3(d_3) = \{P\}.$$

On suppose qu'à l'instant où les distances sont calculées, les trois satellites ont les positions suivantes dans un repère cartésien dont l'origine est le centre de la terre :

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & (-11\,716.227\,778\,km,\ -10\,118.754\,628\,km,\ 21\,741.083\,973\,km) \\ S_2 & = & (-12\,082.643\,974\,km,\ -20\,428.242\,179\,km,\ 11\,741.374\,154\,km) \\ S_3 & = & (\quad 14\,373.286\,650\,km,\ -10\,448.439\,349\,km,\ 19\,596.404\,858\,km). \end{array}$$

Les distances respectives au récepteur ont été calculées et valent

$$d_1 = 22\,163.847\,742\,km, \quad d_2 = 21\,492.777\,482\,km, \quad d_3 = 21\,492.469\,326\,km.$$

Calculer avec la mthode de Newton la position exacte P du récepteur. Que représente $\|P\|_2$? (On rappelle que le rayon de la terre est d'environ $6\,400\,km$.)

Exercice 5.

Retrouver les résultats présentés dans le texte numéro 2 de modélisation avec le logiciel de votre choix (Python, Scilab, Matlab,...).