Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html`

TP n^{o}3 : résolution de systèmes linéaires, méthodes directes

Exercice 1.

Implémenter avec le langage de votre choix la méthode de Gauss pour la résolution d'un système linéaire cramérien $Ax = b$, avec ou sans stratégie de pivôt..

1. Avec une matrice de taille $n = 100$ aléatoire, déterminer le temps de résolution d'un système quelconque. En déduire une estimation du nombre d'opérations par secondes effectuées par votre ordinateur.

2. Sur l'exemple de la matrice de Hilbert, montrer que la résolution d'un système mal conditionné peut conduire à des résultats très dégradés.

3. Sur l'exemple de la matrice duc TD4, montrer que la résolution d'un système simple et bien conditionné peut conduire à des résultats très dégradés en l'absence de stratégie de pivot.

Exercice 2.

On souhaite discrétiser le problème

$$(L)\ \left\{ \begin{array}{l} -y" = f \\ y(a) = y(b) = 0 \end{array} \right.$$

où f est donnée sur $[a, b] = [x_0, x_{n+1}]$.

On pose $x_i = x_{i-1} + h$ $(1 \leq i \leq n+1)$. avec de plus $x_{i+1/2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. On approche la dérivée $y'(x_{i+1/2})$ par

$$y'(x_{i+1/2}) \quad \simeq \quad \frac{(y(x_{i+1}) - y(x_i))}{h},$$

et la dérivée seconde $y"(x_i)$ par

$$y"(x_i) \quad \simeq \quad \frac{(y'(x_{i+1/2}) - y'(x_{i-1/2}))}{h}.$$

On obtient alors une discrétisation du problème $-y" = f$ par le schéma suivant:

$$\forall i \in [|1,n|] \quad \frac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{h^2} \;=\; f(x_i), \tag{1}$$

où y_i représente une approximation de $y(x_i)$ pour tout i dans $[|1,n|]$ avec de plus $y_0 = y(x_0) = 0,\ y_{n+1} = y(x_{n+1}) = 0$.

Le problème discrétisé (1) s'écrit matriciellement sous la forme:

$$AY = h^2 F$$

où $Y = [y_1, .., y_n]^T$, $F = [f(x_1), .., f(x_n)]$ et où la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est défnie par :

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Proposer un code Python/Scilab/Matlab permettant de résoudre le problème (L) à partir de la discrétisation (1) pour une fonction f et un pas h quelconques. Pour résoudre le système linéaire, on pourra utiliser une routine de base ou reprogrammer la méthode de Cholesky.

2. Vérifier la précision de l'approximation dans le cas où $[a,b] = [0,1]$ et $f(x) = \sin(\pi x)$ pour lequel il existe une solution exacte simple.