Séance 10 : méthodes de quadrature

(partie 1 : introduction et méthodes composées)

1) Définition et propriétés générales

L'objectif consiste à calculer de manière approchée une intégrale du type :

$$\boxed{I = \int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx}$$

où $(\alpha, \beta) \in (\overline{\mathbb{R}})^2$ et $\omega :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}_+^*$

(poids fixé C^0)

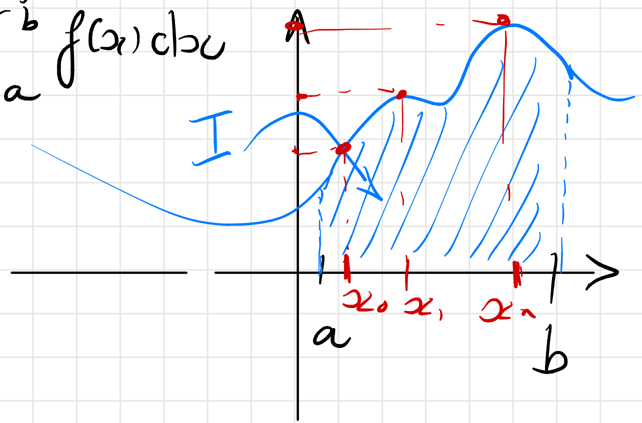
La fonction f à intégrer est définie sur $]\alpha, \beta[$ et (au minimum) C^0 par morceaux

Afin d'inclure l'ensemble des fonctions polynômes dans les fonction intégrables, on impose que $\left(\begin{array}{l}]\alpha, \beta[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \omega(x) \end{array} \right)$ soit intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

* Exemples :

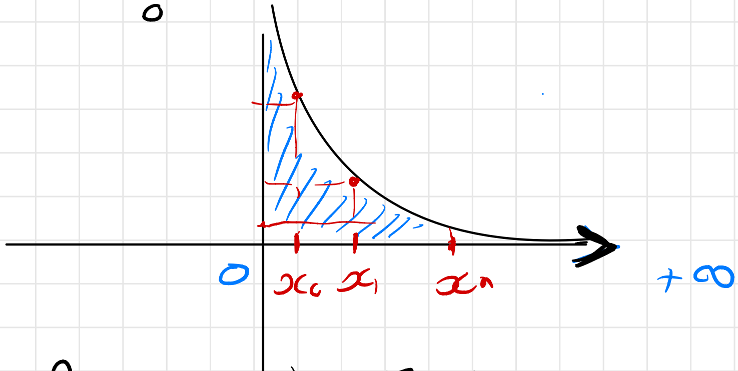
→ $]\alpha, \beta[=]a, b[$ et $\omega(x) \equiv 1$ ($(a,b) \in \mathbb{R}^2$)

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$



→ $]\alpha,\beta[=]0,+\infty[$, $w(x) = e^{-x}$

$$I = \int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-x}\, dx$$



* Pour approcher I, le principe consiste à définir deux familles (indépendamment de f) :

↗ une famille de **points** $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

↘ une famille de **poids** $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$

de telle sorte que

$$\boxed{I_n = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)}$$

soit une approximation de I (pour tout f)

On note :

$$\boxed{E_n(f) = I - I_n}$$

l'erreur commise. On définit la notion d'ordre :

Def : on dit que la méthode de quadrature étudiée est d'ordre $N \in \mathbb{N}$ si elle est exacte pour tous les polynômes de degré $\leq N$

(c'est à dire $\forall f \in \mathbb{R}_N[X]$, $E_n(f) = 0$)

(ceci n'implique pas $\lim_{n \to +\infty} E_n(f) = 0$)

Remarque : il est préférable numériquement d'imposer $\forall i \in \{0, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0$ afin de limiter les erreurs d'arrondis. En effet, dans ce cas, si $f \to \tilde{f} = f + \Delta f$

$$|\Delta I| = |I(\tilde{f}) - I(f)| = |\sum_{i=0}^{n} \lambda_i \Delta f|$$
$$\leq \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\right)} \Delta f = \Delta f \underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \omega(x)\,dx\right)}$$
(si ordre ≥ 0)

* Il existe un résultat général permettant d'assurer la convergence de la méthode, c'est à dire :

$$\lim_{n \to +\infty} E_n(f) = 0 \quad (\forall f \in C^0(]\alpha, \beta[)$$

Théorème : soit une méthode de quadrature telle que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_i^n, 0 \leq i \leq n\} \cup]\alpha, \beta[\subset K \text{ compact}$$

Si on a

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{0, \dots, n\}, \lambda_i^n \geq 0$

(ii) $\forall N \in \mathbb{N} \lim_{n \to +\infty} E(x \mapsto x^N) = 0$

alors la méthode est convergente :

$\forall f \in C^0_{pm}(]\alpha, \beta[)$,

$$\lim_{n \to +\infty} E_n(f) = 0$$

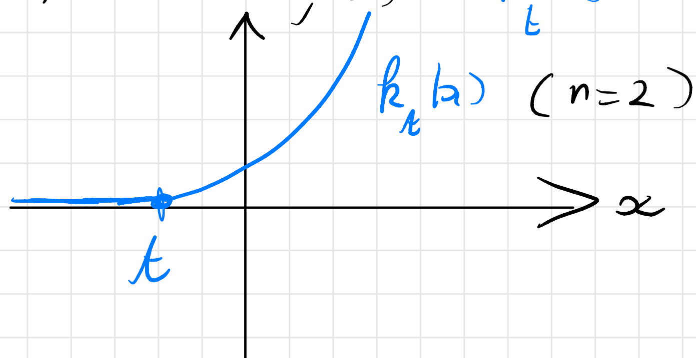
preuve : (voir poly) basée sur Stone-Weierstrass, et Banach Steinhaus.

* Une estimation d'erreur de $|E_n(f)|$ utilise la notion d'ordre et celle du noyau de Peano (voir exercice et poly)

Déf : on appelle noyau de Peano d'ordre n associé à une méthode de quadrature, la fonction réelle :

$$K_n(t) = E\Big(\underbrace{x \longmapsto (x-t)_+^n}_{k_t(x)}\Big)$$

$(x_+ = \max(x, 0))$



Théorème : on suppose que

$\{x_1, \dots, x_n\} \cup]\alpha, \beta[\subset K = [a,b]$

Si la méthode est d'ordre N, alors

$$E(f) = \frac{1}{N!}\int_a^b K_N(r) f^{(N+1)}(r)\,dr$$

(en supposant : $f \in C^{N+1}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$)

En particulier

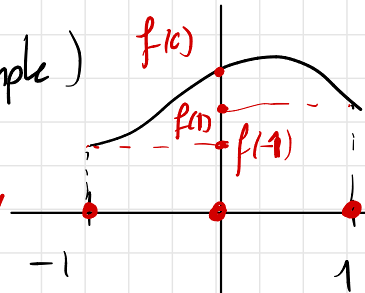
$$|E(f)| \leq \frac{1}{N!}\|f^{(N+1)}\|_\infty \left|\int_a^b |K_N(r)|\,dr\right|$$

preuve : (voir poly) basée sur la formule de Taylor Intégrale

Il existe deux grandes familles de méthodes :

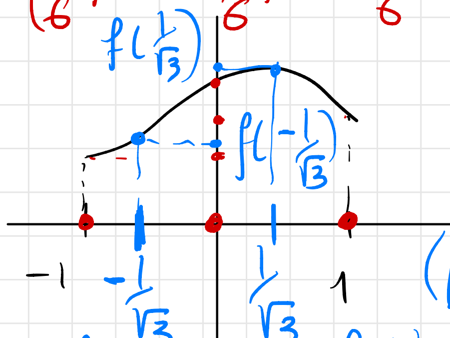
- → les méthodes composées (précises et simples)
- → les méthodes de Gauss (très précises et plus complexes à définir)

(Exemple)



(erreur : $| \; I | \leq \frac{1}{90} \|f^{(4)}\|$)

$$I \approx 2\left(\frac{1}{6} f(-1) + \frac{4}{6} f(0) + \frac{1}{6} f(1)\right) \quad \text{(Simpson)}$$



(Gauss)

erreur $| \; I | \leq \frac{1}{135} \|f^{(4)}\|_\infty$

$$I \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

2) Les méthodes composées

On suppose ici que $]\alpha, \beta[$ est borné et que $\omega = 1$.

2.1) Construction

Une méthode de quadrature composée est définie en deux étapes

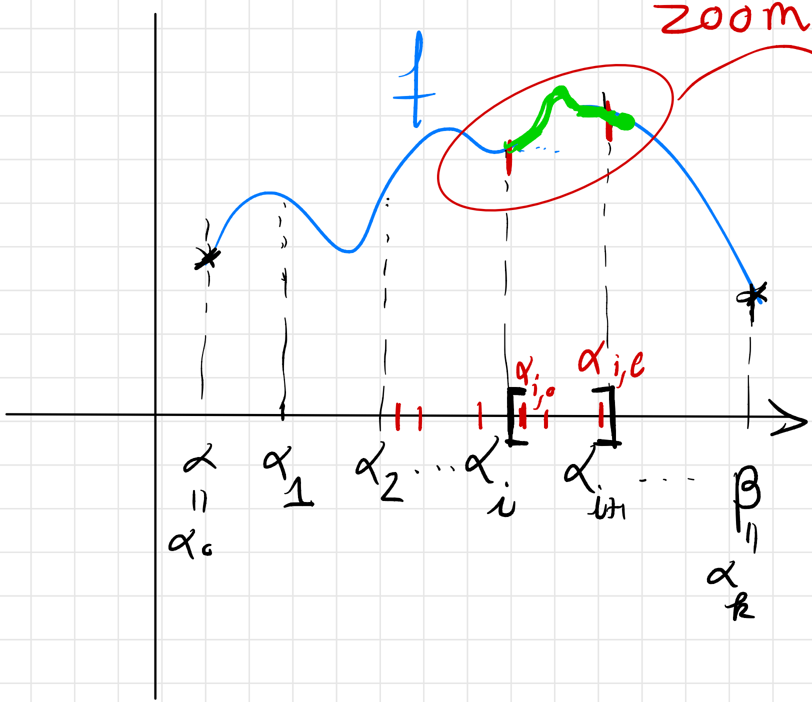
→ subdivision de l'intervalle $]\alpha, \beta[$ en k sous intervalles :

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 \text{ --- } < \alpha_k = \beta$$

→ sur chaque sous intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, on approche f par son interpolation de Lagrange en $(\ell+1)$ points de $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$:

$$\alpha_{i,j} = \frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} + \tau_j \left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2}\right)$$

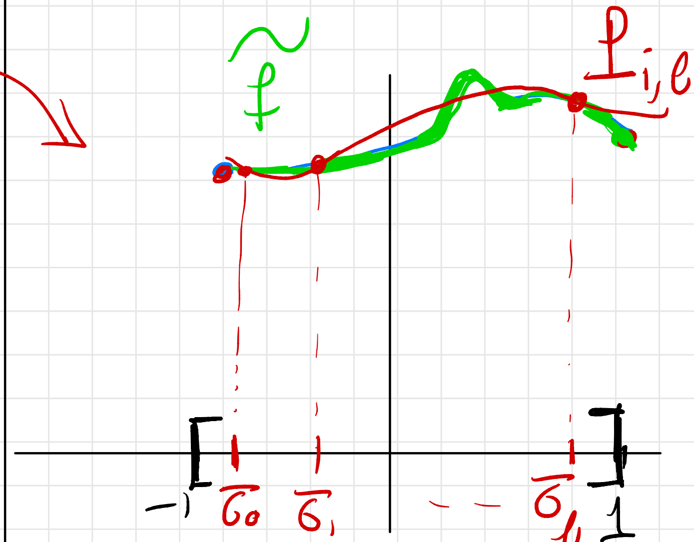
avec $-1 \leq \tau_0 \leq \tau_1 \cdots \leq \tau_\ell \leq 1$



On note $\tilde{f}$ $\left(\begin{array}{l} [-1,1] \to \mathbb{R} \\ y \mapsto f\left(\frac{\alpha_i + \alpha_{i+1}}{2} + y\left(\frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{2}\right)\right) \end{array} \right)$

(translation - homothétie)

6



Soit $P_{i,\ell}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange de $\tilde{f}$ aux points $\tau_0, \ldots, \tau_\ell$ ($d^\circ P_{i,\ell} \leq \ell$)

La méthode consiste alors à remplacer sur chaque segment $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, $\tilde{f}$ par son polynôme d'interpolation $P_{i,\ell}$:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \underset{\text{(Chasles)}}{=} \sum_{i=0}^{k} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} f(x)\,dx$$

$$\underset{\text{(chgt variables)}}{=} \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right) \int_{-1}^{1} \underbrace{f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha_i+\alpha_{i+1}}{2} + \left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right)y\right)\right)}_{\tilde{f}(y)} dy$$

$$\simeq \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right) \int_{-1}^{1} P_{i,\ell}(y)\,dy \qquad (\tilde{f} \text{ remplacé par } P_{i\ell})$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{2}\right) \int_{-1}^{1} \left(\sum_{j=0}^{\ell} \tilde{f}(\sigma_j)\, \ell_j(y)\right) dy$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) \sum_{j=0}^{\ell} \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ell_j(y)\,dy\right) f(\alpha_{i,j})$$

points

poids

On définit ainsi une méthode de quadrature dite composée avec les

- points : $(\alpha_{i,j})_{\substack{0 \le i \le k \\ 0 \le j \le \ell}}$
- poids $\lambda_{i,j} = (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\,\omega_j$

où

$$\boxed{\omega_j = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ell_j(y)\,dy}$$

A cette méthode composée, on associe une méthode élémentaire sur $[-1,1]$:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \approx 2 \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j f(\tau_j)}$$

(toute l'information est contenue dans cette méthode)

A présent, on va :

→ définir qq exemples

→ étudier la convergence

→ estimer l'ordre et la vitesse de convergence

2.2) Exemples

Les exemples les plus simples sont les suivants :

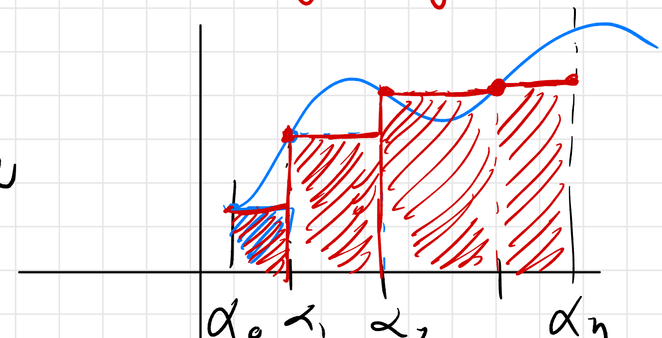
(i) $\ell = 0$, $\tau_0 = -1$

$\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \approx 2 f(-1)$ (élémentaire)

$\left(\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} l_0(y)\,dy = 1\right)$

$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1}-\alpha_i) f(\alpha_i)$ (composée)

$\Longrightarrow$ rectangles à gauche



(ii) $\ell = 0$, $\tau_0 = 1$

$\Longrightarrow$ rectangle à droite

(iii) $\ell = 0$, $\tau_0 = 0$:

$$\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \simeq 2 f(0) \quad \text{(élémentaire)}$$

$\Longrightarrow$ point milieu ("rectangles au milieu")

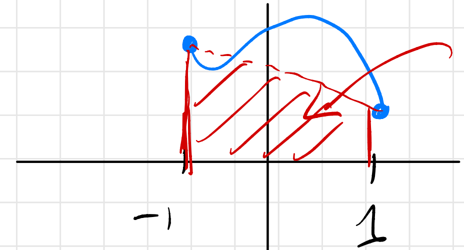
(iv) $\ell = 1$, $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 1$

$$\begin{cases} \ell_0(y) = \dfrac{y-1}{(-1-1)} = \dfrac{1-y}{2} \\ \ell_1(y) = \dfrac{y+1}{2} \end{cases}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ell_0(y)\,dy = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ell_1(y)\,dy = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \simeq 2\left(\frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1)\right)$$



trapèze d'aire : $f(1)+f(-1)$

composée :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0} (\alpha_{i+1}-\alpha_i)\left(\frac{1}{2} f(\alpha_i) + \frac{1}{2} f(\alpha_{i+1})\right)$$

$\Longrightarrow$ méthode des trapèzes

($\frac{1}{2}$ rectangles à gauche + $\frac{1}{2}$ rect. à droite)

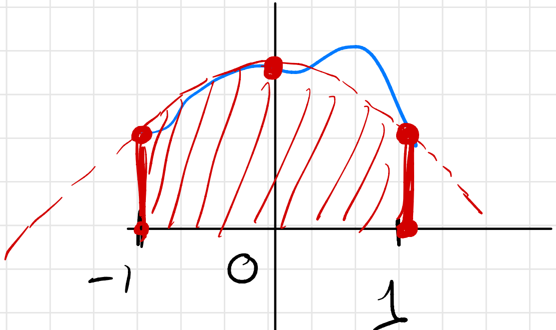
(iv) $\ell = 2$, $\tau_0 = -1$, $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$

On trouve $\omega_0 = \frac{1}{6}$, $\omega_1 = \frac{4}{6}$, $\omega_2 = \frac{1}{6}$

Méthode élémentaire :

$$\int_{-1}^{1} f(y)\,dy \simeq 2\left(\frac{1}{6} f(-1) + \frac{4}{6} f(0) + \frac{1}{6} f(1)\right)$$

$\Longrightarrow$ méthode de Simpson



(estimation d'erreur : voir TD 8)

Plus généralement, on continue cette construction en rajoutant des points d'interpolation répartis uniformément sur $[-1,1]$:

$$\sigma_j = -1 + \frac{2j}{\ell} \quad (0 \leq j \leq \ell) \quad (\ell \geq 2)$$

On parle des méthodes de Newton-Cotes fermé.

$\rightarrow \ell = 4$:

$\sigma_0 = -1$, $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \frac{1}{2}$, $\sigma_4 = 1$

On trouve

$\omega_0 = \omega_4 = 7/90$, $\omega_1 = \omega_3 = \frac{16}{45}$, $\omega_2 = \frac{2}{15}$

(Boole Villarceau)

$\rightarrow \ell = 6$: Weddle Hardy

Au delà de $\ell = 6$, on trouve des méthodes ayant des poids de signes différents....

Remarque : on a toujours $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell} \omega_i = 1$

car $$\sum_{i=0}^{\ell} \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \ell_j(y)\,dy = \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{\ell} \ell_j(y)}_{=1}\Big)dy}_{=1}$$

2.3) Convergence d'une méthode composée

Pour obtenir un résultat de convergence (lorsque le nombre de points tend vers l'infini) il faut fixer ℓ et faire tendre k vers l'infini.

Théorème : Les méthodes composées sont convergentes au sens suivant : si f est C^0 sur $]\alpha, \beta[$)

$$\lim E_{\ell,k}(f) = 0$$

$\left\{ \begin{array}{l} k \to +\infty \\ \text{et } \underbrace{\max\limits_{0 \leq i \leq k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i)}_{\text{pas de la subdivision}} \to 0 \end{array} \right.$

preuve :

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j f(\sigma_{i,j})$$

$$= \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j \Big(\underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{k} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) f(\sigma_{i,j})}_{} \Big)$$

$$\left(\text{car } \sum_{j=0}^{\ell} \omega_j = 1\right)$$

$\downarrow$ ($k \to +\infty$, pas $\to 0$)

0

par définition des intégrales de Riemann.

Remarque : il n'y a pas de convergence lorsque $\ell \to +\infty$ (cf phénomène de Runge)

2.4) Ordre et estimation d'erreur

Théorème : l'ordre d'une méthode composée est au moins égal à ℓ.

Pour les méthodes de Newton Cotes fermée, cet ordre est égal à $\ell+1$ si ℓ est pair.

preuve : si $f \in \mathbb{R}_\ell[X]$, alors on a aussi $\tilde{f} \in \mathbb{R}_\ell[X]$ et donc $P_{i,\ell} = \tilde{f}$. Par construction (P.I.L. en $\ell+1$ points) on a bien $E_n(f) = 0$

Pour les méthodes de Newton Cotes fermé avec ℓ pair, on constate que la méthode élémentaire est exacte pour le monôme $y \mapsto y^{\ell+1}$ (ℓ pair)

$$\int_{-1}^{1} y^{\ell+1}\,dy = 0 \text{ (impaire)}$$

$$\int_{-1}^{1} P_{i\ell}(y)\,dy = 0 \ (P_{i,\ell} \text{ impair})$$

On gagne ainsi un degré et la méthode est donc exacte si $f \in \mathbb{R}_{\ell+1}[X]$.

Les estimations d'erreurs des méthodes composées peuvent s'obtenir de deux manières :

- directement avec des outils de type Taylor (cf TD8, Simpson)
- avec le calcul du noyau de Péano d'ordre N et le résultat général du §1

Dans les 2 cas, cette estimation prend la forme suivante

Théorème : on suppose que la méthode composée considérée est d'ordre N (ℓ ou $\ell+1$ par exemple). On suppose $f \in C^{(N+1)}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R})$. Alors,

$$|E_{k,C}(f)| \leq C_N(\beta-\alpha)\delta^{N+1}\|f^{(N+1)}\|_\infty$$

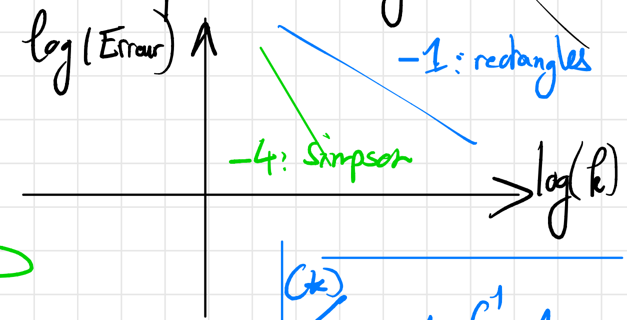
où $\begin{cases} C_N : \text{constante} \\ \delta : \text{pas de la subdivision} \end{cases}$

preuve : voir poly

Remarque : dans le cas d'une subdivision régulière $\delta = \frac{\beta-\alpha}{k}$, l'erreur est en $O\left(\left(\frac{1}{k}\right)^N\right)$.

	ordre	erreur
rectangles (g., d.)	0	$O\left(\frac{1}{k}\right)$ ($k+1$ points)
pt milieu	1	$O\left(\frac{1}{k^2}\right)$
trapèzes	1	$O\left(\frac{1}{k^2}\right) \equiv \frac{1}{2} RG + \frac{1}{2} RD$
Simpson	3	$O\left(\frac{1}{k^4}\right) \equiv \frac{1}{6} RG + \frac{4}{6} P.M + \frac{1}{6} RD$
Boole-V.	5	$O\left(\frac{1}{k^6}\right)$

(illustration numérique Scilab/Python)



(*) $\pi = 4 \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$

Pour une même fonction et une précision fixée, si il faut 10000 pts avec les rectangles, il faut

↗ 100 points avec les trapèzes ou le point milieu

↘ 10 points avec Simpson !

→ **Ex 1** : compréhension méthode composée

Ex 2 : Hermite à la place de Lagrange

Ex 3 : calcul d'un noyau de Peano

Ex 4 : erreur de Simpson + approximation de π (*)

Université Mohammed 6 Polytechnique
Education Fellow UM6P - Année 2020/2021
Modélisation et Méthodes Numériques
http ://dumas.perso.math.cnrs.fr/Agreg-UM6P.html

TD n°8 : Méthodes de quadrature (méthodes composées)

Exercice 1.

On considère une méthode de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(u)du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$

où α et β sont des réels donnés et u_0 et u_2 sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1,1]$.

i) Déterminer les constantes α et β et les points u_0 et u_2 pour que cette formule soit d'ordre 3.

ii) On admet que pour de telles valeurs de α, β, u_0 et u_2, si $f \in \mathcal{C}^4([-1,1],\mathbb{R})$, l'erreur entre l'intégrale exacte de f sur $[-1,1]$ et sa valeur approchée est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{360}||f^{(4)}||_\infty$$

Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0+h]$ (et non plus sur $[-1,1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.

iii) A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b$ et donner une majoration de l'erreur commise en fonction de a, b, n et de $||f^{(4)}||_\infty$.

Exercice 2. Une nouvelle formule d'intégration numérique : Posons pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$:

$$I(f) \ = \ \omega_a f(a) + \omega_b f(b) + \omega'_a f'(a) + \omega'_b f'(b). \tag{1}$$

i) Trouver ω_a, ω_b, ω'_a et ω'_b pour que $I(f)$ approchant $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ soit d' ordre 3. On supposera d'abord que $[a,b] = [-1,1]$ puis on se ramènera au cas général.

ii) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4$ défini par $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ est un isomorphisme. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(a) = f(a)$, $P'_f(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P'_f(b) = f'(b)$.

iii) On pose $E(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - I(f)$. Montrer que $E(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - P_f(x))\,dx$.

iv) On admet le résultat suivant : On suppose que $f \in C^4([a,b])$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}(x-a)^2(x-b)^2 f^{(4)}(\xi_x). \tag{2}$$

et tel que $x \to f^{(4)}(\xi_x)$ est continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^4([a,b]) \quad \exists \xi \in [a,b] \quad \text{tq.} \quad E(f) \ = \ C(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \tag{3}$$

v) Ecrire la formule de quadrature composée approchant $\int_\alpha^\beta f(x)\ dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire (1), où on a discrétisé le segment $[\alpha, \beta]$ en p segments égaux (on pose $h = \dfrac{(\beta - \alpha)}{p}$).

vi) Montrer que l'erreur de la formule composée est en $\mathcal{O}(h^N)$ où N est un entier que l'on déterminera.

Exercice 3.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x-t)_+)^n = (max(x-t, 0))^n$$

i) Représenter graphiquement les fonction f_{-1}^1, f_0^2 et f_1^1.

ii) Pour toute fonction réellle f, on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1, 1]$:

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$

On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.

iii) Calculer <u>explicitement</u> la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$K(t) = E(f_t^N)$$

avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).
On distinguera les cas $t \in]-1, 1[$ et $t \notin]-1, 1[$.

iv) Reprendre le calcul précédent en remplaçant la méthode des trapèzes par la méthode de Simpson élémentaire sur $[-1, 1]$ (on veillera à calculer la nouvelle valeur de N).

Exercice 4. <u>Autour de la méthode de Simpson</u>

i) Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a, a[, \mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \dfrac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \dfrac{\alpha}{180} t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

ii) Soit $f \in C^5([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a,b],\mathbb{R})$.

iii) a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4.\frac{1}{6}(\frac{1}{1+0^2} + 4.\frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0,1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π.

TD 8 (méthodes composées)

Ex 1) i)

On écrit l'égalité par les polynômes $1, x, x^2, x^3$

$$\begin{cases} 2 = \alpha(\beta + 2) \\ 0 = \alpha(\beta u_0 + 0 + u_2) \\ \frac{2}{3} = \alpha(\beta u_0^2 + u_2^2) \\ 0 = \alpha(\beta u_0^3 + u_2^3) \end{cases}$$

($\alpha \neq 0$: sinon ....)

(2) et (4) Comme $(\beta, 1)$ est solution

on a $\begin{vmatrix} u_0 & u_2 \\ u_0^3 & u_2^3 \end{vmatrix} = 0$, soit

$u_2 u_0^3 = u_0 u_2^3$

($u_0 \neq 0$ et $u_2 \neq 0$: sinon ....)

$\Rightarrow u_0^2 = u_2^2$

($u_0 \neq u_2$, sinon ....)

$\Rightarrow u_0 = -u_2 \Rightarrow \beta = 1$ (relation (2))

$\Rightarrow \alpha = 2/3$ (relation (1))

puis $u_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

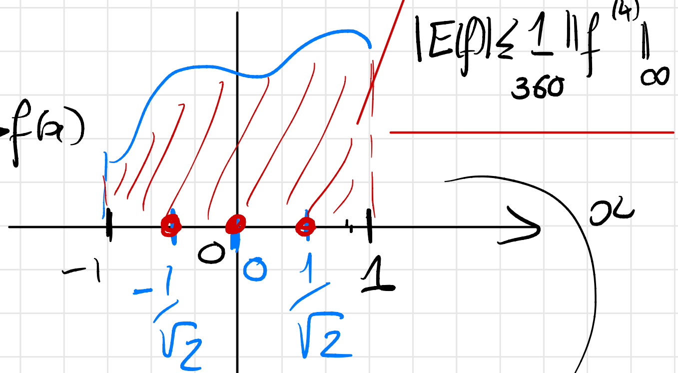
La formule s'écrit :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{3}\left(f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

et est d'ordre 3

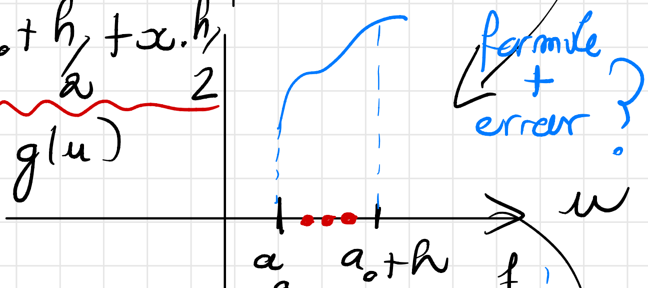
(ii)

$$|E(f)| \le \frac{1}{360}\|f^{(4)}\|_\infty$$

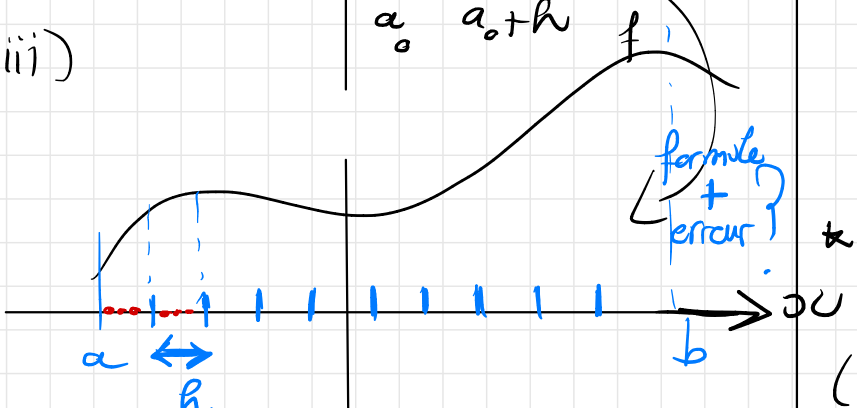


$u = a_0 + \frac{h}{2} + x\cdot\frac{h}{2}$

$u \to g(u)$



(iii)



★ Formule sur $[a_0, a_0+h]$:

$$\int_{a_0}^{a_0+h} g(u)\,du = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} g\left(a_0+\frac{h}{2}+x\frac{h}{2}\right)dx$$
$$\approx \frac{h}{2}\left[\frac{2}{3}g\left(a_0+\frac{h}{2}-\frac{h}{2\sqrt2}\right)+\frac{2}{3}g\left(a_0+\frac{h}{2}\right)+\frac{2}{3}g\left(a_0+\frac{h}{2}+\frac{h}{2\sqrt2}\right)\right]$$

★ Estimation d'erreur sur $[a_0, a_0+h]$:

$$|E(g)| \le \underbrace{\frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^4}\frac{\|g^{(4)}\|_{[a_0,a_0+h]}}{360}$$
$$\le \frac{h^5}{32}\,\frac{\|g^{(4)}\|}{360}$$

★ Formule sur $[a,b]$:

$$a = x_0 \le x_1 = x_0+h \le \dots \le x_n = b$$
$$\left(h = \frac{b-a}{n}\right)$$

3

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{(Chasles)}}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_i+h} f(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}\left[f\left(x_i+\frac{h}{2}-\frac{h}{2\sqrt{2}}\right) + f\left(x_i+\frac{h}{2}\right) + f\left(x_i+\frac{h}{2}+\frac{h}{2\sqrt{2}}\right) \right]$$

* Erreur sur $[a,b]$:

$$|E(f)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h^5}{11520} \|f^{(4)}\|_\infty$$

$$= \frac{h^4}{11520} \|f^{(4)}\| (b-a)$$

$$= \frac{(b-a)^5}{11520\, n^4} \|f^{(4)}\|_\infty$$

(comparable à Simpson ~~ou Gauss legendre~~ à 2 pts)