Séance 11 : méthodes de quadrature (partie 2 : méthodes de Gauss)

Déjà vu (séance 10)

1) Introduction et propriétés générales

2) Méthodes composées

Contexte : $f \in \mathcal{C}(]\alpha, \beta[, \mathbb{R})$

$\omega :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}_+^*$, poids tel que ses moments $x \mapsto x^n \omega(x)$ soit intégrables. On cherche une méthode de quadrature du type :

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)} \quad (1)$$

où $\begin{cases} (x_i) \text{ (points)} \in]\alpha, \beta[^{n+1} \\ (\lambda_i) \text{ (poids)} \in \mathbb{R}^{n+1} \end{cases}$

L'objectif consiste ici à construire la méthode d'ordre le plus élevé possible à n fixé. On rappelle qu'une méthode de quadrature est d'ordre N si elle est exacte par les polynômes de degré $\leq N$.

3) Méthodes de Gauss

3.1) Rappels sur les polynômes orthogonaux

On munit l'ensemble des fonctions continues sur $]\alpha,\beta[$ et de carré intégrable :

$$\Omega = \left\{ f \in \mathcal{C}(]\alpha,\beta[,\mathbb{R}) \;/\; \int_\alpha^\beta f^2(x)\,\omega(x)\,dx < +\infty \right\}$$

d'un produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\alpha^\beta f(x)\,g(x)\,\omega(x)\,dx$$

Toute fonction polynôme est incluse dans Ω.

Par orthogonalisation de Gram Schmidt de la famille $\{1, x, \dots x^n, \dots\}$, on montre qu'il existe une unique famille $\{P_0, P_1, \dots P_n, \dots\}$ telle que

$$\begin{cases} (i) & d^\circ(P_n) = n \\ (ii) & P_n \text{ est unitaire } (P_n(x) = x^n + \dots) \\ (iii) & \forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[x],\ \langle P_n, Q \rangle = 0 \end{cases}$$

On parle de la familles des polynômes orthogonaux pour le poids ω.

* Exemples (voir TD)

→ $]\alpha,\beta[=]-1,1[$, et $\omega(x) = 1$

→ polynômes de Legendre

→ $]\alpha,\beta[=]-1,1[$ et $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

→ polynômes de Tchebychev

→ $]\alpha,\beta[=]0,+\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$

→ polynômes de Laguerre

→ $]\alpha,\beta[= \mathbb{R}$ et $\omega(x) = e^{-x^2}$

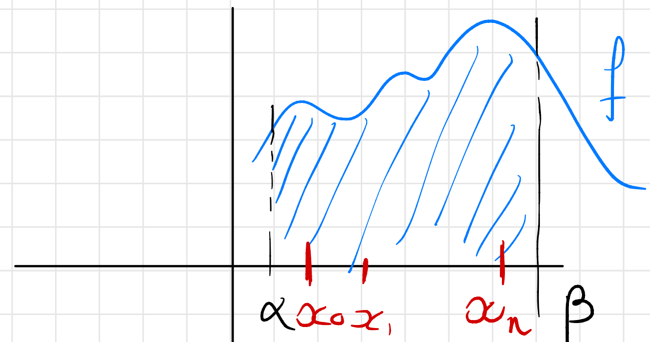
→ polynômes d'Hermite

Parmi les nombreuses propriétés générales de ces familles de polynômes (voir TD), on utilise la propriété suivante :

Théorème : soit (P_n) la famille des polynômes orthogonaux associée au poids ω sur $]\alpha, \beta[$. Les polynômes P_n sont scindés et possèdent n racines simples toutes dans $]\alpha, \beta[$.

(preuve : voir TD)

3.2) Construction des méthodes de Gauss



Le théorème suivant montre l'existence et l'unicité d'une méthode à $(n+1)$ points ds $]\alpha, \beta[$ d'ordre $2n+1$.

Théorème : Il existe une unique méthode de quadrature du type

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\omega(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

qui soit d'ordre $2n+1$. Dans ce cas :

* La famille des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ correspond aux $(n+1)$ racines du $(n+1)^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal associé au poids ω.
* La famille des poids $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ s'exprime par :

$$\lambda_i = \int_\alpha^\beta \ell_i(x)\,\omega(x)\,dx$$

où $(\ell_i)_{0\leq i\leq n}$ est la famille des polynômes de base de Lagrange pour les points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$

On parle de la méthode de Gauss //

preuve :

* Unicité : soit une méthode de quadrature à $(n+1)$ pts d'ordre $(2n+1)$. On note

$$P_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

On montre que P_{n+1} est le $(n+1)$ème polynôme orthogonal associé au poids ω :

(i) et (ii) : ok. Par (iii), soit $Q\in \mathbb{R}_n[X]$

$$\int_\alpha^\beta \underbrace{\underbrace{P_{n+1}(x)}_{n+1}\,\underbrace{Q(x)}_{n}}_{2n+1}\,\omega(x)\,dx \underset{\text{ordre } 2n+1}{=} \sum_{i=0}^{n} P_{n+1}(x_i)Q(x_i) = 0$$

et on a donc (iii) //

Par l'unicité des poids, soit l_i le $i^{\text{ème}}$ polynôme de base de Lagrange associé aux points (x_i). On a $d°(l_i) = n$

et donc :

$$\int_\alpha^\beta l_i(x)\omega(x)dx \underset{\uparrow}{=} \sum_{j=0}^{n} \lambda_j l_i(x_j)$$

(ordre $2n+1$)

$$= \lambda_i \quad //$$

* Existence : On vérifie que la méthode proposée dans l'énoncé est bien d'ordre $2n+1$. On montre cela en 2 étapes :

→ la méthode est au moins d'ordre n :

soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_\alpha^\beta Q(x)\omega(x)dx = \int_\alpha^\beta \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{n} Q(x_j) l_j(x)\right)}_{\text{P.I.L de } Q \,\equiv\, Q} w(x)dx$$

$$= \sum_{j=0}^{n} Q(x_j) \underbrace{\left(\int_\alpha^\beta l_j(x)\omega(x)dx\right)}_{\lambda_j} \quad //$$

→ la méthode est au moins d'ordre $2n+1$:

soit $Q \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. On effectue la division euclidienne de Q par $\prod_{i=0}^{n}(X - x_i)$:

$$Q(X) = \underbrace{\left(\prod_{i=0}^{n}(X - X_i)\right)}_{P_{n+1}(X)} \underbrace{M(X)}_{d° \leq n} + \underbrace{R(X)}_{d° \leq n}$$

On calcule les 2 expressions séparément :

* $\int_\alpha^\beta Q(x)\,\omega(x)\,dx = \int_\alpha^\beta P_{n+1}(x)\,M(x)\,\omega(x)\,dx$

$$+ \int_\alpha^\beta R(x)\,\omega(x)\,dx$$

$$= \underbrace{0}_{\langle P_{n+1}, M\rangle = 0} + \int_\alpha^\beta R(x)\,\omega(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i R(x_i) \quad //$$

* $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j Q(x_j) = \sum_{j=0}^{n} \lambda_j \left(\cancel{\prod_{i=0}^{n} (x_j - x_i)} \right) M(x_j)$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R(x_j)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \lambda_j R(x_j) \quad //$$

Exemples

* Méthode de Gauss-Legendre :

$]\alpha, \beta[=]-1, 1[$, $\omega(x) = 1$

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

d'ordre $2n+1$:

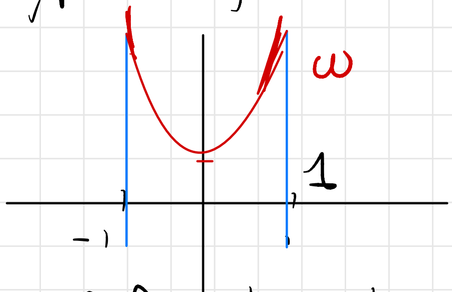
$\rightarrow n = 1$: Polynômes de Legendre :

$1, X, X^2 - \frac{1}{3}, \dots$ et

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

* Méthode de Gauss-Tchebychev :

$]\alpha,\beta[=]-1,1[$ et $\omega(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



Les polynômes de Tchebychev ont une expression explicite tout comme leurs racines :

$$x_i = \cos\left(\frac{(2i+1)}{(2n+2)}\pi\right) \quad 0 \le i \le n$$

On a alors la méthode suivante d'ordre $2n+1$:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \approx \frac{\pi}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f\left(\cos\left(\frac{(2i+1)}{(2n+2)}\pi\right)\right)$$

(idem : Gauss-Hermite, Gauss-Laguerre)

(Illustration informatique : comparaison Rectangles / Trapèzes / Simpson / Gauss à 2 pts)

Remarques :

1) la méthode est exactement d'ordre $2n+1$.

(exercice ou poly)

2) Les poids λ_i sont tous strictement positifs. En effet,

$$0 < \int_\alpha^\beta \underbrace{l_i^2(x)}_{d^\circ \le 2n}\,\omega(x)\,dx = \sum_{j=0} \lambda_j\, l_i^2(x_j) = \lambda_i$$

3.3) Convergence des méthodes de Gauss

Un résultat (théorique) de convergence est donné par le résultat suivant :

Proposition : Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in\Omega$. On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)w(x)\,dx-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i f(x_i)}_{E(f)}\right)=0$$

pour toute méthode de Gauss.

preuve : voir théorème §1 (séance 10)

En général, on couple une méthode de Gauss d'ordre fixé avec une subdivision d'un intervalle $[a,b]$ d'intégration (voir TD)

Une estimation d'erreur peut également être utilisée :

Théorème : soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in C^{2n+2}([\alpha,\beta],\mathbb{R})$. On a l'estimation suivante :

$$E(f)=\frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_\alpha^\beta \Pi(x)\,w(x)\,dx$$

où $\Pi(x)=\underbrace{\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)^2}_{d^\circ\le 2n+2}$

preuve : (voir poly $\rightarrow$ interpolation d'Hermite)

Exemple : pour Gauss Legendre

$$E(f)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{135}$$