Séance 12 : résolution approchée d'équations différentielles : méthodes d'Euler

1

1) Introduction et notations

On s'intéresse à la résolution approchée d'un problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^m & (m \geq 1) \end{cases} \quad (1)$$

où $f : [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ est une fonction :

→ continue sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$

→ globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable :

$\exists L > 0, \forall (t, y_1, y_2) \in [t_0, t_0+T] \times (\mathbb{R}^m)^2,$

$\| f(t, y_2) - f(t, y_1) \| \leq L \| y_2 - y_1 \|$

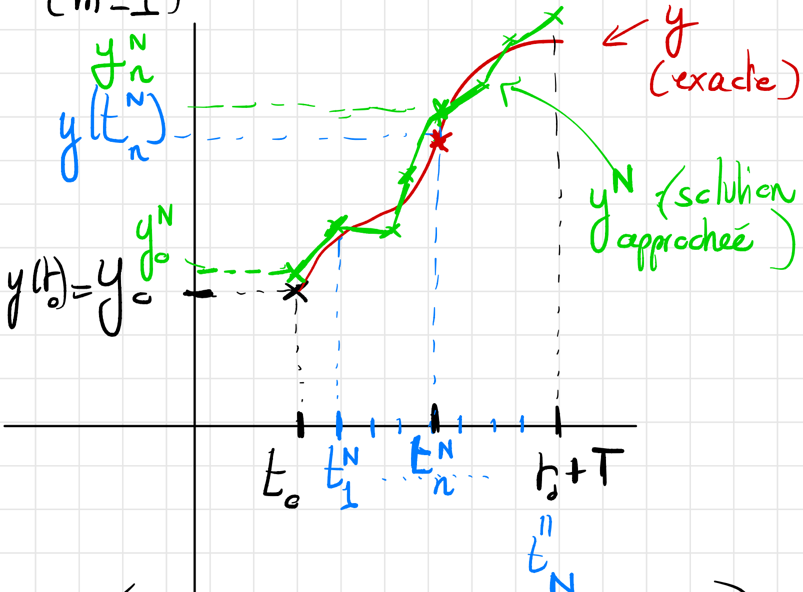
Sous ces hypothèses sur f, le problème (1) admet une unique solution $y \in C^1([t_0, t_0+T], \mathbb{R}^m)$, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^m$ (Théorème de Cauchy-Lipschitz).

Ce cadre englobe de nombreux problèmes "concrets" (voir textes)

En général, il n'est pas possible de résoudre exactement le problème (1).

On doit recourir à une méthode approchée.

$(m=1)$



$$\left(\delta_N = \underset{0\le i\le N-1}{\mathrm{Max}} |t_{i+1}-t_i| : \text{pas} \right)$$

Pour cela :

→ on discrétise $[t_0, t_0+T]$ en N sous intervalles

$$t_0 < t_1^N < \dots < t_N = t_0+T$$

(par exemple $t_i = t_0 + i\Delta T$ où $\Delta T = T/N$ si subdivision régulière)

→ on cherche à approcher $y(t_n^N)$ par y_n^N pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$

→ on définit une fonction y^N affine par morceaux sur $[t_0, t_0+T]$ telle que

$$\forall n \in \{0, \dots N\}, \quad y^N(t_i^N) = y_i^N$$

Une méthode de résolution approchée de (1) consiste à définir une construction

de la suite $\{y_0^N, y_1^N, \dots, y_N^N\}$
pour tout $N \in \mathbb{N}$.

L'étude de cette méthode (en particulier sa convergence) consiste à rechercher le comportement de y^N lorsque $N \to +\infty$ (par exemple, a-t-on $y^N \to y$?)

En général, la notation t_n^N (ou y_n^N) est simplifiée en t_n (ou y_n).

2) Méthode d'Euler (explicite)

La méthode d'Euler repose sur une ré-écriture de la formule (1) :

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} y'(t)\,dt = y(t_{n+1}) - y(t_n)$$
$$\parallel$$
$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\,ds$$

soit :

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\,ds$$

et à approcher l'intégrale par la méthode des rectangles (à gauche) :

$$y(t_{n+1}) \simeq y(t_n) + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y(t_n))$$

Cela conduit à proposer la construction de $\{y_0, \dots, y_n, \dots, y_N\}$:

$$(2)\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé (pas forcément } y(t_0)) \\ y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n) \\ \qquad (0 \leq n \leq N-1) \end{cases}$$

On parle de la méthode d'Euler explicite.

Le théorème suivant assure la convergence de la méthode d'Euler :

Théorème : on note $e_n = y_n - y(t_n)$ l'erreur commise en t_n. On a pour tout $n \in \{0, \dots N\}$:

$$\|e_n\| \leq \frac{e^{nL\Delta T} - 1}{L} \omega(\Delta T, y') + e^{nL\Delta T} \|e_0\|$$

(dans le cas d'une subdivision régulière) où

$$\omega(\delta, g) = \underset{(y,z)}{\mathrm{Max}} \{ |g(y) - g(z)|, |y - z| \leq \delta \}$$

(module de continuité)

En particulier

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \text{ (ou } \Delta T \to 0) \\ y_0 \to y(t_0)}} \mathrm{Max}\{\|e_n\|, 0 \leq n \leq N\} = 0$$

Preuve : elle repose sur 2 Lemmes techniques : (Gronwall discret)

Lemme 1 : soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\boxed{\begin{cases} z_0 \geq 0 \\ z_{n+1} \leq A z_n + B \end{cases}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

(où $A \geq 1$ et $B \geq 0$)

on a alors
$$\boxed{z_n \leq e^{nQ} z_0 + \frac{e^{nQ}-1}{Q} B}$$
avec $Q = A - 1$

preuve : on a (comme $A = 1+Q \leq e^{Q}$)

$$z_n \leq A^n z_0 + B\left(\frac{A^n - 1}{A-1}\right)$$
$$\leq (e^{Q})^n z_0 + B\left(\frac{e^{nQ}-1}{Q}\right)$$

Lemme 2 : soit $(z_n)_n$ une suite telle que :

$$\begin{cases} z_0 \geq 0 \\ z_{n+1} \leq (1+\underbrace{h_n}_{\geq 0}) z_n + \underbrace{\alpha_n}_{\geq 0} \end{cases}$$

((h_n) et (α_n) deux suites fixées)

On a alors, en notant $t_0 = 0$ et $t_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i$

on a
$$z_n \leq e^{t_n} z_0 + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(t_n - t_{i+1})} \alpha_i$$

(preuve en exercice)

Retour à la démonstration : on écrit la relation exacte et la relation approchée correspondante :

$$\begin{cases} y(t_{n+1}) = y(t_n) + \displaystyle\int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds \\ y_{n+1} = y_n + \Delta T\, f(t_n, y_n) \end{cases}$$

et on soustrait ces 2 relations :

$$e_{n+1} = e_n + \left(\Delta T f(t_n, y_n) - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(s, y(s))\, ds \right)$$

soit

$$e_{n+1} = e_n + \Delta T \big(f(t_n, y_n) - f(t_n, y(t_n)) \big) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Big[\underbrace{f(t_n, y(t_n))}_{y'(t_n)} - \underbrace{f(s, y(s))}_{y'(s)} \Big] ds$$

Par majoration, on obtient :

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + \Delta T (L \|e_n\|) + \Delta T\, \omega(y', \Delta T)$$

On se retrouve dans le cas du Lemme 1 : on obtient la majoration :

$$\|e_n\| \leq e^{nL\Delta T} \|e_0\| + \frac{e^{nL\Delta T} - 1}{L\Delta T}\, \omega(y', \Delta T)$$

$(A = 1 + L\Delta T)$

Lorsque $N \to +\infty$ et $y_0^N \to y(t_0)$, on a

$$|e^{nL\Delta T}| \leq |e^{nL\frac{T}{N}}| \leq e^{LT} (\text{cste})$$

et

$$\begin{cases} \|e_0\| \to 0 & (y_0^N \to y(t_0)) \\ \bar{\omega}(y', \Delta T) \to 0 & (y' \text{ est } C^0) \end{cases}$$

donc U.C sur $[t_0, t_0+T]$ et $\Delta T \to 0$)

Corollaire : on a

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ y_0^N \to y(t_0)}} \|y^N - y\|_\infty = 0$$

où y^N : solution approchée de (1) (affine par morceaux)

(convergence uniforme de y^N vers y)

preuve (partielle) :

si $t \in [t_0, t_0+T]$, il existe $n \in \{0, .., N\}$ tq $t_n \leq t \leq t_{n+1}$. On écrit

$$\|y^N(t) - y(t)\| \leq \underbrace{\|y^N(t) - y^N(t_n)\|}_{\leq \|y_{n+1} - y_n\| \ (y^N \text{ affine}) \text{ puis } \leq \Delta T \|f(t_n, y_n)\|} + \|e_n\| + \underbrace{\|y(t_n) - y(t)\|}_{0 \ (y \ C^0)}$$

majoration uniforme en n

Remarque : le théorème s'étend pour une subdivision quelconque (avec le Lemme 2 à la place du Lemme 1) avec une convergence :

$$\lim \|y^N - y\| = 0$$
$$\begin{cases} N \to +\infty \\ y_0^N \to y(t_0) \\ \delta_N \to 0 \text{ (pas de la subdivision)} \end{cases}$$

Il est possible d'obtenir une estimation de la vitesse de convergence de la méthode d'Euler si f est C^1 :

Proposition

On suppose $y([t_0, t_0+T]) \subset K$ compact de $\mathbb{R}^m$, et que $f \in C^1([t_0, t_0+T] \times K, \mathbb{R}^m)$. Alors

$$\|e_n\| \leq \Delta T \|f^{[1]}\|_{\infty} \frac{e^{nL\Delta T} - 1}{L} + e^{nL\Delta T} \|e_0\|$$

$L([t_0, t_0+T] \times K)$

En particulier, si $y_0^N = y(t_0)$ $(e_0 = 0)$ on a

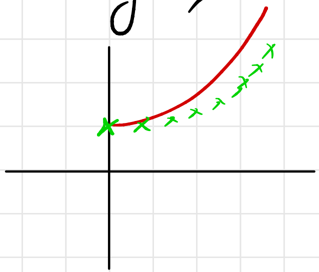
$$\max_{0 \leq n \leq N} \{\|e_n\|\} = O(\Delta T)$$

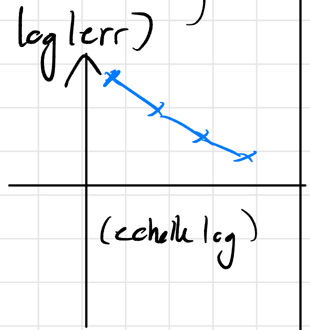
(où on a noté $f^{[1]} = \underbrace{\partial_t f}_{\mathbb{R}^m} + \underbrace{\partial_x f}_{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m} \cdot \underbrace{f}_{\mathbb{R}^m}$ dérivée totale de f)

preuve : si f est C^1, alors y est C^2 et $y''(t) = f^{[1]}(t, y)$.

Exemple d'implémentation : test de convergence et de vitesse de convergence ($y' = Cy + D$)

à faire :





Exercices : TD 10

→ Ex 1 : convergence de la méthode d'Euler sur un cas particulier (sans utiliser le théorème du cours)

→ Ex 2 : illustration d'un mauvais conditionnement d'Euler explicite

→ Ex 3 : définition et convergence de la méthode d'Euler implicite :

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + \Delta T \, f(t_{n+1}, y_{n+1})}$$

(analogie avec rectangles à droite)

Cette méthode, plus lourde à calculer et avec les mêmes résultats théoriques de convergence, est souvent mieux conditionnée que la méthode d'Euler explicite.