séance 13 : résolution d'équations différentielles : consistance, stabilité, convergence, ordre.

(suite de la séance 12 : § 1 et 2)

1) Introduction et notations

$$(1)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

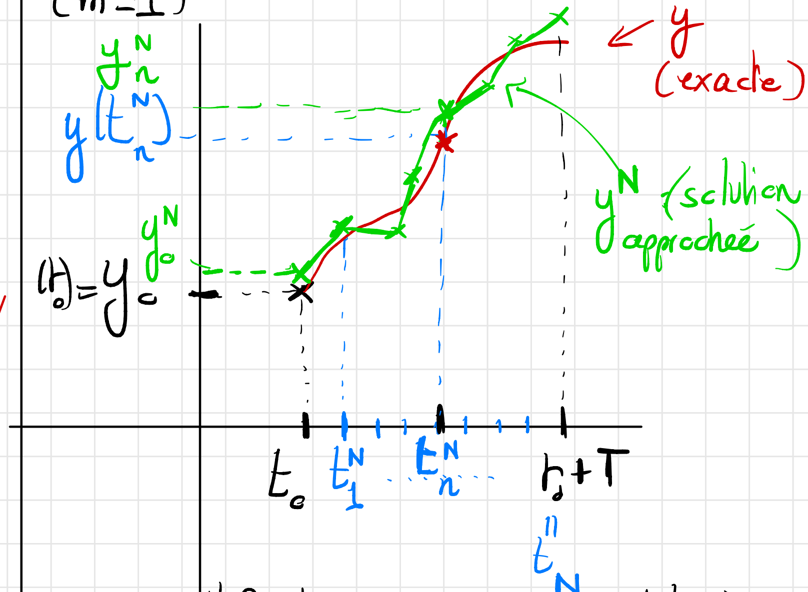
(f C^0 et globalement Lipschitzienne)

2) Méthode d'Euler

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

3) Méthodes à un pas

($m=1$)



Une méthode à un pas consiste à construire la suite d'approximations $\{y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots, y_N\}$ de la solution exacte y, aux points $\{t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + T\}$ par une formule itérative à un pas :

$$(2)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n)\,\Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

Dans cette formule, la fonction Φ est définie sur $[t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times [0, T]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^m$.

(explicite)

Dans le cas de la méthode d'Euler, on a

$$\Phi(t, y, h) = f(t, y)$$

4) Consistance, stabilité, convergence, ordre : définitions (cas subdivision régulière et $m = 1$)

Déf (consistance) on appelle erreur de consistance de la méthode (2), la quantité

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T\, \Phi(t_n, y_n, \Delta T)$$

où y est la solution de (1) (à $y(0)$ donné)

On dit que la méthode (2) est consistante si

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| = 0$$

* Def (stabilité) : on considère le schéma suivant perturbé :

$$\begin{cases} z^{n+1} = z^n + \Delta T \, \phi(t_n, z^n, \Delta T) + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{perturbation}} \\ z^0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

On dit que la méthode (2) est stable si

$$\max_{0 \le n \le N} |z_n - y_n| \le \overbrace{M}^{\text{contrôle}} |z_0 - y_0| + \overbrace{M'}^{} \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|$$

où M et M' sont deux réels, indépendants de N, y_0 et z_0.

* Def (convergence)

on dit que la méthode (2) est convergente si

$$\lim_{\substack{N \to +\infty \\ y_0 \to y(t_0)}} \left(\max_{0 \le n \le N} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$$

* Def (ordre) : la méthode (2) est d'ordre (au moins) $p \in \mathbb{N}$ si, $f \in C^p([t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ et ϕ C^p, et si

$$\sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n| \le C (\Delta T)^p$$

où ε_n est l'erreur de consistance (et $C > 0$ indépendant de N).

4) Consistance, stabilité, convergence, ordre : propriétés fondamentales

On démontre ici les 4 propriétés suivantes qui permettent d'associer chaque notion à une propriété de Φ :

Th (consistance) : la méthode (2) est consistante si et seulement si :

$\forall (t,y,h) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times [0,T]$,

$$\Phi(t,y,0) = f(t,y)$$

Remarque : la méthode d'Euler est consistante.

preuve : on écrit

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T\, \Phi(t_n, y_n, \Delta T)$$

$$\underset{(A.F.)}{=} \Delta T f(c_n, y(c_n)) - \Delta T\, \Phi(t_n, y_n, \Delta T)$$

$$= \Delta T(\alpha_n + \beta_n) \text{ où } (c_n \in [t_n, t_{n+1}])$$

$$\begin{cases} \alpha_n = f(c_n, y(c_n)) - \Phi(c_n, y(c_n), 0) \\ \beta_n = \Phi(c_n, y(c_n), 0) - \Phi(t_n, y_n, \Delta T) \end{cases}$$

En notant $\tilde{\Phi}$: $\left(\begin{array}{l} [t_0, t_0+T] \times [0,T] \to \mathbb{R}^m \\ (t,h) \mapsto \Phi(t, y(t), h) \end{array}\right)$

$\tilde{\Phi}$ est C^0 donc UC (car définie sur un compact) et ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N_0 tq si $N \geq N_0$,

$\forall n \in \{0, \dots N\}$, $|\beta_n| \leq \varepsilon$

Ainsi $\left| \sum_{n=0}^{N} \Delta T |\beta_n| \right| \leq \varepsilon T$ si $N \geq N_0$

Par définition d'une intégrale de Rieman, on a

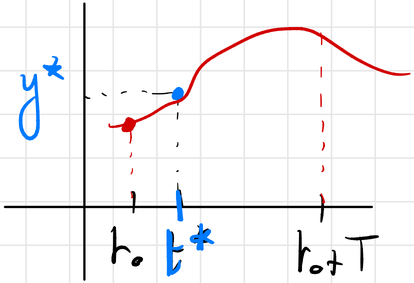
$$\sum_{n=0}^{N} \Delta T |\alpha_n| = \int_{t_0}^{t_0+T} |f(t, y(t)) - \Phi(t, y(t), 0)| dt$$

Par que la méthode soit consistante, il faut (et il suffit) que par tout solution y de (1) (c'est à dire par tout $y(t) \in \mathbb{R}^m$),

$\forall t \in [t_0, t_0+T]$, $f(t, y(t)) = \Phi(t, y(t), 0)$

Soit $(t^*, y^*) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$, par le théorème de Cauchy-Lipschitz il existe une solution unique $\tilde{y}$ telle que :

$$\begin{cases} \tilde{y}'(t) = f(t, \tilde{y}(t)) \quad t \in [t_0, t_0+T] \\ \tilde{y}(t^*) = y^* \end{cases}$$



On a donc en particulier

$$f(t^*, \underbrace{\tilde{y}(t^*)}_{y^*}) = \Phi(t^*, \underbrace{\tilde{y}(t^*)}_{y^*}, 0).$$

Th (stabilité) : pour qu'une méthode (2) soit stable, il suffit que Φ soit Lipschitzienne par rapport à y :

$$\forall (t, y_1, y_2, h) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times [0, T],$$

$$|\Phi(t, y_2, h) - \Phi(t, y_1, h)| \leq \Lambda |y_2 - y_1|$$

(on a alors $M = M' = e^{\Lambda T}$)

Remarque : la méthode d'Euler est stable ($\Lambda = 1$)

preuve : on suppose Φ Λ. Lip. On a :

$$|y_{n+1} - z_{n+1}| \leq |y_n - z_n| + |\varepsilon_n| + \Delta T |\Phi(t_n, y_n, \Delta T) - \Phi(t_n, z_n, \Delta T)|$$

$$\leq |y_n - z_n|(1 + \underbrace{\Delta T . \Lambda}_{h_i}) + |\varepsilon_n|$$

(Φ est Λ. Lipschitz)

Grâce au Lemme 2 (vu en séance 12) on a

$$|y_n - z_n| \leq e^{n \Delta T}|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{(n-1-i)\Delta T} |\varepsilon_i|$$

$$\leq e^{N \Delta T \Lambda}|y_0 - z_0| + \sum_{i=0}^{n-1} e^{N \Delta T \Lambda} |\varepsilon_i|$$

$$\leq \underbrace{(e^{\Lambda T})}_{M}|y_0 - z_0| + \underbrace{(e^{\Lambda T})}_{M'} \sum_{i=0}^{N-1} |\varepsilon_i|$$

$$\Rightarrow \max_{0 \leq n \leq N} |y_n - z_n| \leq \text{''} \quad \text{''}$$

la méthode est bien stable.

Théorème (convergence) : pour qu'une méthode à un pas (2) soit convergente, il suffit qu'elle soit consistante et stable.

("consistance + stabilité $\Longrightarrow$ convergence")

Corollaire : si une méthode (2) est telle que :

(i) $\Phi(t, y, 0) = f(t, y)$ $(\forall (t, y))$

(ii) Φ est Lipschitz par rapport à y,

alors la méthode est convergente.

Remarque : on retrouve la convergence de la méthode d'Euler.

preuve : on a

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta T \, \Phi(t_n, y_n, \Delta T) \\ y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta T \, \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T) + \varepsilon_n \end{cases}$$

où

$$\varepsilon_n = y(t_{n+1}) - y(t_n) - \Delta T \, \Phi(t_n, y(t_n), \Delta T)$$

est l'erreur de consistance. En notant $z_n = y(t_n)$, on a :

$$z_{n+1} = z_n + \Delta T \, \Phi(t_n, z_n, \Delta T) + \varepsilon_n.$$

Avec la stabilité de la méthode (2), on a :

$$\max_{0 \leq n \leq N} \left(|y_n - y(t_n)| \right) \leq M |y_0 - y(t_0)| + M' \sum_{n=0}^{N-1} |\varepsilon_n|$$

Avec la consistance de la méthode (2), on a :

$$\lim_{N \to +\infty \text{ et } y_0 \to y(t_0)} \left(\max_{0 \leq n \leq N} |y_n - y(t_n)| \right) = 0$$

Théorème (ordre) : une méthode à un pas (2) est d'ordre $\geq p$ si et seulement si :

(i) f et Φ sont C^p

(ii) $\forall \ell \in \{0, \dots, p-1\}, \forall (t,y) \in [t_0, t_0+T] \times \mathbb{R}^m$

$$\left.\frac{\partial^\ell \Phi(t,y,h)}{\partial h^\ell}\right|_{h=0} = \frac{1}{\ell+1} f^{[\ell]}(t,y)$$

où $f^{[\ell]}$ est la dérivée totale de f :

$$\begin{cases} f^{[0]} = f \\ f^{[\ell+1]}(t,y) = \underbrace{\partial_t f^{[\ell]}(t,y)}_{m\times 1} + \underbrace{\nabla_y f^{[\ell]}(t,y)}_{\text{Jacobien } m\times m} \cdot \underbrace{f(t,y)}_{m\times 1} \end{cases}$$

__preuve__ : (voir poly)

__Remarque__ 1) la méthode d'Euler est d'ordre 1 mais pas davantage :

$$\frac{\partial^0 \Phi}{\partial h^0}(t,y,0) = \frac{1}{1+0} f^{[0]}(t,y)$$

mais

$$\left.\frac{\partial^1 \Phi(t,y,h)}{\partial h^1}\right|_{h=0} = 0 \neq \frac{1}{1+1} f^{[1]}(t,y)$$

2) Si une méthode est d'ordre p, alors

$$\max_{0\leq n\leq N} |y_n - y(t_n)| \leq \underbrace{M|y_0 - y(t_0)|}_{\text{nul si } y_0 = y(t_0)} + C(\Delta T)^p$$

L'ordre est bien représentatif de la vitesse de convergence

3) la dérivée totale de f permet d'exprimer les dérivées successives de y en fonction de y :

$$y'(t) = f(t, y(t))$$

$$\Downarrow$$

$$y''(t) = \partial_t f(t,y) + \nabla f \cdot y'(t)$$

soit $y''(t) = f^{[1]}(t, y(t))$

$$y^{(p+1)}(t) = f^{[p]}(t, y(t))$$

L'étape suivante va consister à définir des méthodes d'ordre plus élevé que la méthode d'Euler

$\rightarrow$ (Méthodes de Runge Kutta)

Exercice (TD 11)

Illustrations sur des exemples (paramétriques) de la vérification des 4 propriétés //