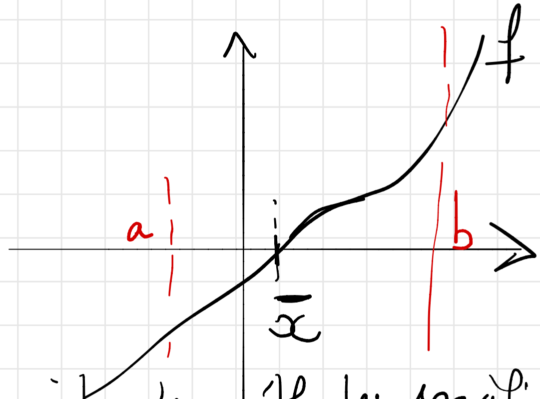
# Résolution de systèmes non linéaires

**Problème à résoudre :**

soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ou $(A \subset \mathbb{R}^n)$

($f$ $C^1$ voire davantage). On cherche à approcher les solutions de l'équation $f(x) = 0$

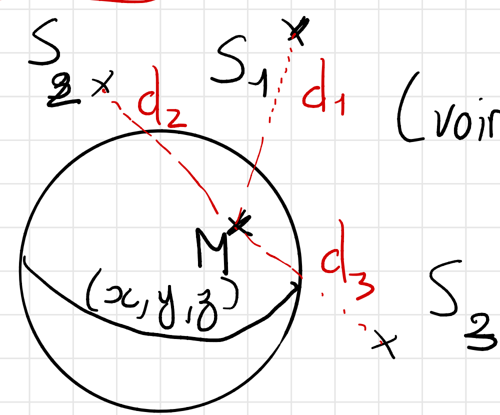
* Cas particulier : $n = 1$




(il existe des méthodes spécifiques telles que la dichotomie).

* Exemples "concrets"

→ GPS




(voir TP)

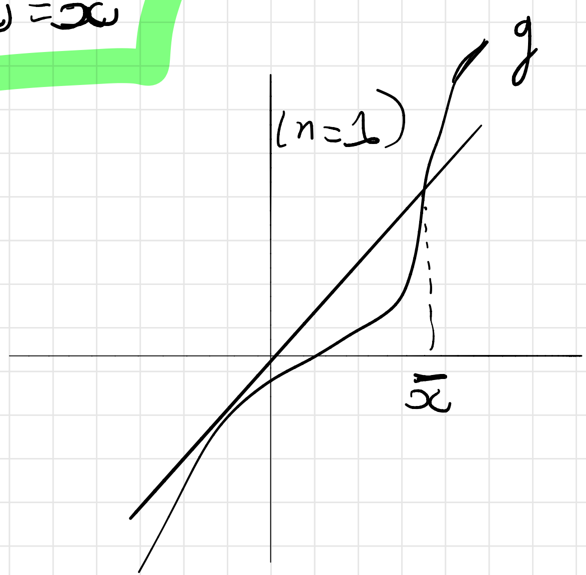
$$\begin{cases} \|S_1M\|^2 = d_1^2 \\ \|S_2M\|^2 = d_2^2 \\ \|S_3M\|^2 = d_3^2 \end{cases}$$

→ texte agrégation : états d'équilibre en chimie //

* Autre écriture : recherche d'un point fixe : $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

on cherche $x \in \mathbb{R}^n$ solution de

$g(x) = x$




## 1) Méthodes itératives

**Théorème 1** : A fermé de $\mathbb{R}^n$ et

$g : A \to \mathbb{R}^n$ tq

(i) $g(A) \subset A$

(ii) $g$ strictement contractante sur A :

$\exists K \in ]0,1[$ tq $\|g(x)-g(y)\| \leq K\|x-y\|$

Alors $g$ admet un unique point fixe $\bar{x} \in A$. De plus si $x_0 \in A$, la suite $(x_k)_k$ :

$x_{k+1} = g(x_k)$ converge vers $\bar{x}$ et :

$$\|x_k - \bar{x}\| \leq \frac{K^k}{1-K}\|x_1 - x_0\|$$

preuve :

(i) Unicité de $\bar{x}$ : immédiate

(ii) Existence à l'aide de la suite $(x_k)$ : on montre la convergence de cette suite. La limite $\bar{x} \in A$ est telle que $g(\bar{x}) = \bar{x}$ ($g$ continue).

On montre que $(x_k)$ est de Cauchy dans $A$ complet (car fermé ds $\mathbb{R}^n$)

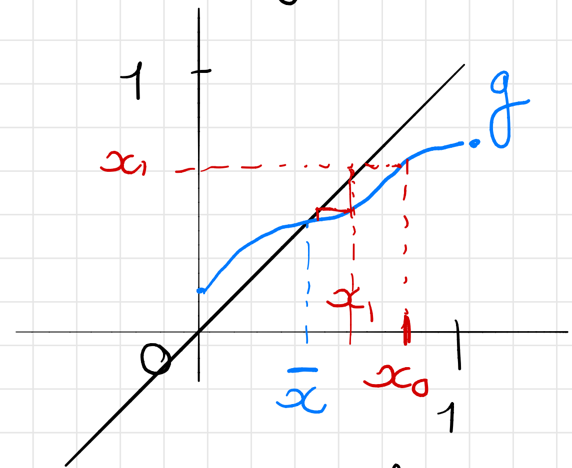
En effet, $\|x_{k+1} - x_k\| \leq K^k \|x_1 - x_0\|$

et ensuite

$(l \geq k)$ $\|x_l - x_k\| \leq \dfrac{K^k}{1-K} \|x_1 - x_0\|$ //

$\bar{x}$

Exemple : $g : [0,1] \to [0,1]$




Def : on dit que la convergence de $(x_k)$ vers $\bar{x}$ est d'ordre $p \geq 1$ si

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| \leq C \|x_k - \bar{x}\|^p$$

($p = 1$ : convergence géométrique si $C < 1$)

($p = 2$ : convergence quadratique)

Exemple :

* $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ : géométrique
* $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$ : quadratique
* Méthode itérative : géométrique

On considère un cas particulier du théorème 1 où la convergence est quadratique :

Théorème 2 : on suppose de plus que $g \in C^2(A, \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x} \in \mathring{A}$ avec $Dg(\bar{x}) = 0$

différentielle de $g$ en $\bar{x}$ ($\in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$)

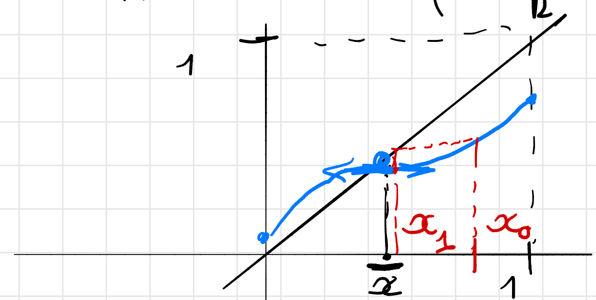
Dans ce cas, la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie au Th1 : $x_{k+1} = g(x_k)$ est quadratique

preuve : on écrit la formule de Taylor Young à l'ordre 2, entre $x_n$ et $\bar{x}$ :

$$g(x_k) = g(\bar{x}) + \cancel{Dg(\bar{x}).(x_k-\bar{x})} + O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$ $= 0$

et ainsi

$$\|x_{k+1} - \bar{x}\| = O(\|x_k - \bar{x}\|^2)$$



# Théorème 3 $(n=1)$

Soit $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\bar{x}$ tel que $g(\bar{x}) = \bar{x}$ avec $|g'(\bar{x})| < 1$.
Alors, il existe un voisinage $V$ de $\bar{x}$ tq la suite $\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = g(x_k) \end{cases}$ converge vers $\bar{x}$.

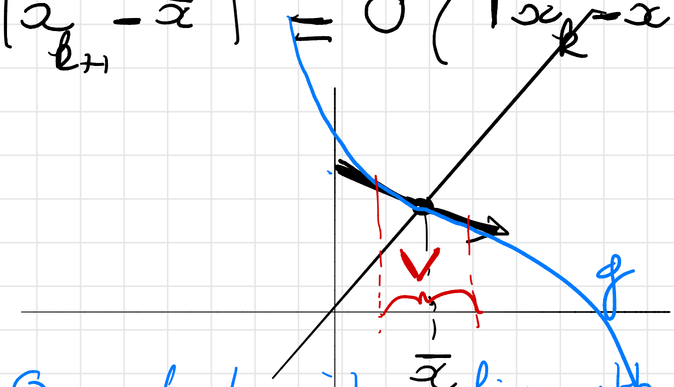
(i) si $g'(\bar{x}) \neq 0$, la convergence est géométrique.

(ii) si $g'(\bar{x}) = 0 = \dots = g^{(p-1)}(\bar{x}) = 0$ et $g^{(p)}(\bar{x}) \neq 0$, alors la convergence est d'ordre $p$ (si $g \in C^p(V, \mathbb{R})$)

preuve :

Par continuité de $g'$, on trouve $V$ tq $|g'(x)| < 1$ si $x \in V$. Avec $V$ fermé, on se retrouve dans les hypothèses du Th 1 (avec le TAF).
La vitesse de convergence se déduit de la formule de Taylor à l'ordre $p$ :

$$|x_{k+1} - \bar{x}| = O(|x_k - \bar{x}|^p)$$




On parle de point fixe attractif.

## 2) Méthode de Newton

**Théorème 4** : Soit $f \in C^3(A, \mathbb{R}^n)$ avec $A$ ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\bar{x} \in A$ tq $f(\bar{x}) = 0$. On suppose que $Df(\bar{x})$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
Il existe un voisinage $V$ de $\bar{x}$ tq la suite $(x_k)$ :

$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - Df(x_k)^{-1} \cdot f(x_k) \end{cases}$$

converge vers $\bar{x}$ de manière quadratique.

Preuve : soit $V$ voisinage de $\bar{x}$ tq $Df(x)$ isomorphisme si $x \in V$.
et

$$g : \begin{pmatrix} V \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x \longmapsto x - Df(x)^{-1} \cdot f(x) \end{pmatrix}$$

On a $g(\bar{x}) = \bar{x} - 0 = \bar{x}$ et

$$Dg(\bar{x}) = I - D(Df(\bar{x})^{-1}) \cdot \cancel{f(\bar{x})}^{\,0} - \underbrace{Df(\bar{x})^{-1} \cdot Df(\bar{x})}_{I} = 0$$

En choisissant $V$ tq $g$ soit de plus, strictement contractante sur $V$, et $V$ stable, on se trouve alors dans les hypothèses du Th.2.
La conclusion s'en déduit.

**Def** : on parle de la <u>méthode</u> de <u>Newton</u>

Cas particulier $n=1$ :

**Corollaire** : Soit $f \in C^3(A,\mathbb{R})$ et $\bar{x}$ tq $f(\bar{x}) = 0$ et $f'(\bar{x}) \neq 0$ (où $\bar{x} \in \mathring{A}$)

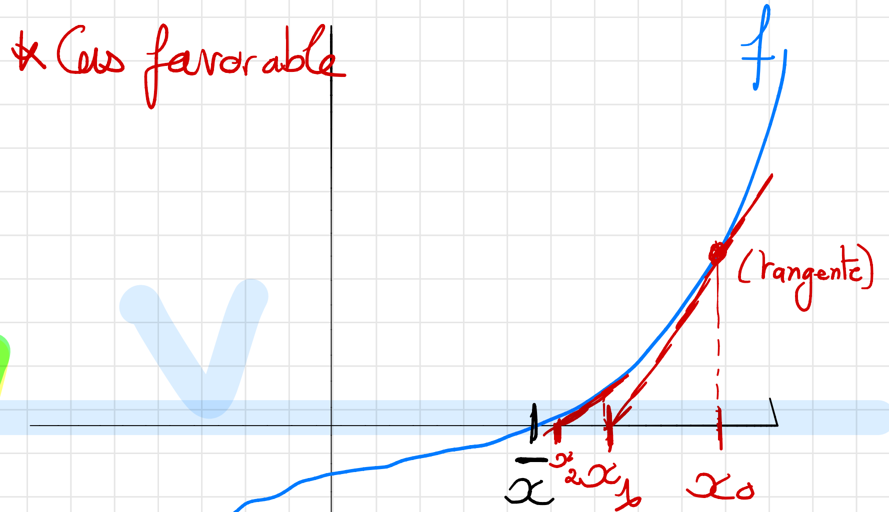
Il existe un voisinage $V$ de $\bar{x}$ tq la suite $(x_k)$ :

$$\begin{cases} x_0 \in V \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \end{cases}$$

converge vers $\bar{x}$ de manière quadratique.

Illustration géométrique $(n=1)$

* Cas favorable

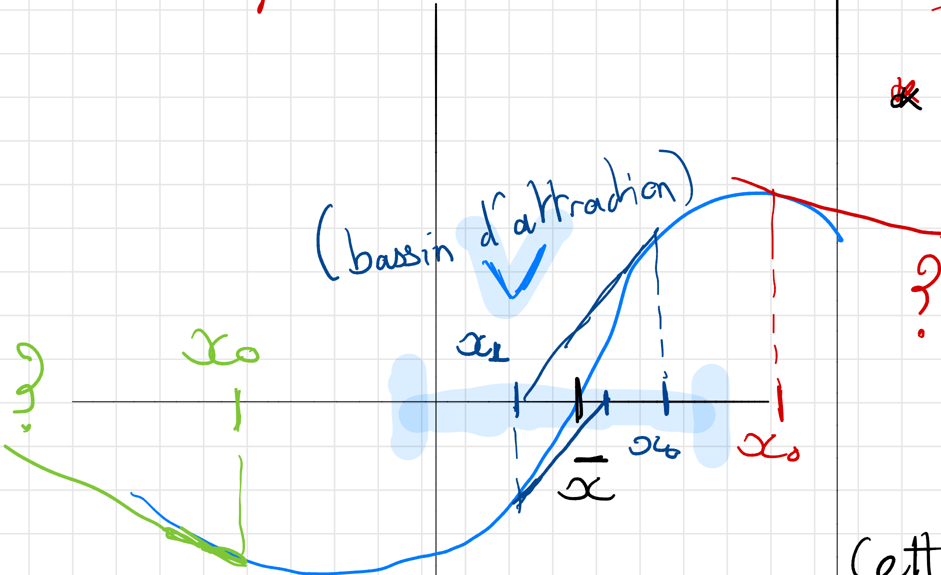



tangente : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$0 \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

(pied de la tangente)

* Cas "défavorable"




(bassin d'attraction → fractales)

* Extensions possibles de Newton :

Voir poly et TD.

* Exemples

* recherche d'une racine carrée :

soit $a>0$, on résout $x^2-a=0$ avec Newton :

$$\begin{cases} x_0>0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2-a}{2x_n} = \dfrac{1}{2}\left(x_n + \dfrac{a}{x_n}\right) \end{cases}$$

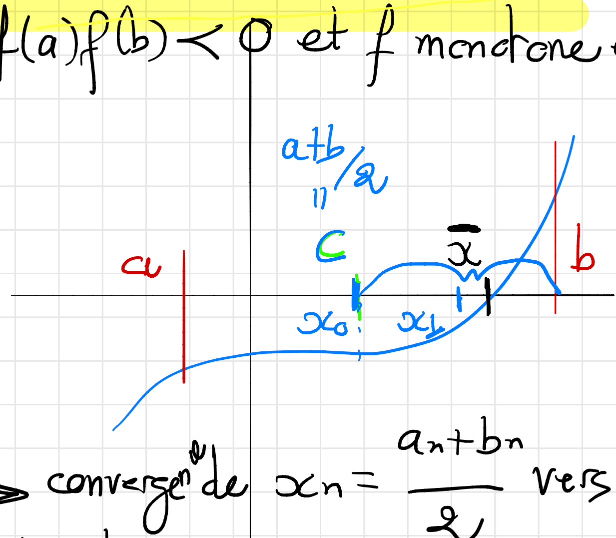
Cette suite converge vers $\sqrt{a}$ pour tout $x_0>0$, de manière quadratique. (algorithme phénicien)

* recherche des racines d'un polynôme (voir poly)

## 3) Autres méthodes ($n=1$)

### * Méthode de dichotomie

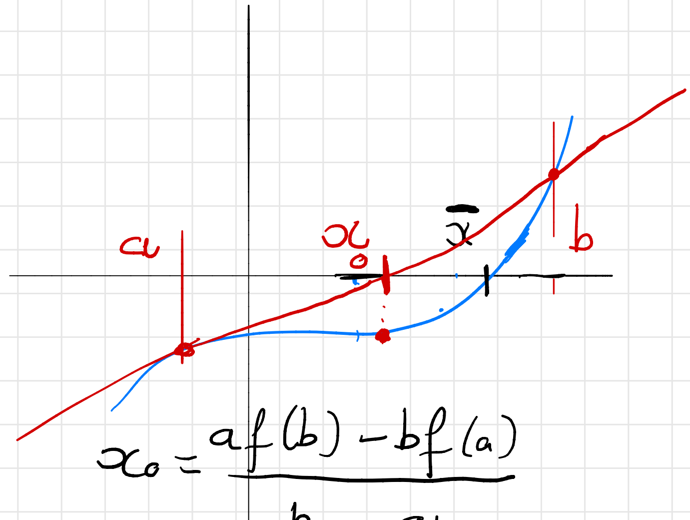
$f(a)f(b)<0$ et $f$ monotone et $C^0$




→ convergence de $x_n = \dfrac{a_n+b_n}{2}$ vers $\bar{x}$ géométrique :

$$|x_n-\bar{x}| \leq \frac{1}{2^{n-1}}|x_1-\bar{x}|$$

### Variante : fausse position




$$x_0 = \frac{af(b)-bf(a)}{b-a}$$

(au lieu de $\dfrac{a+b}{2}$)

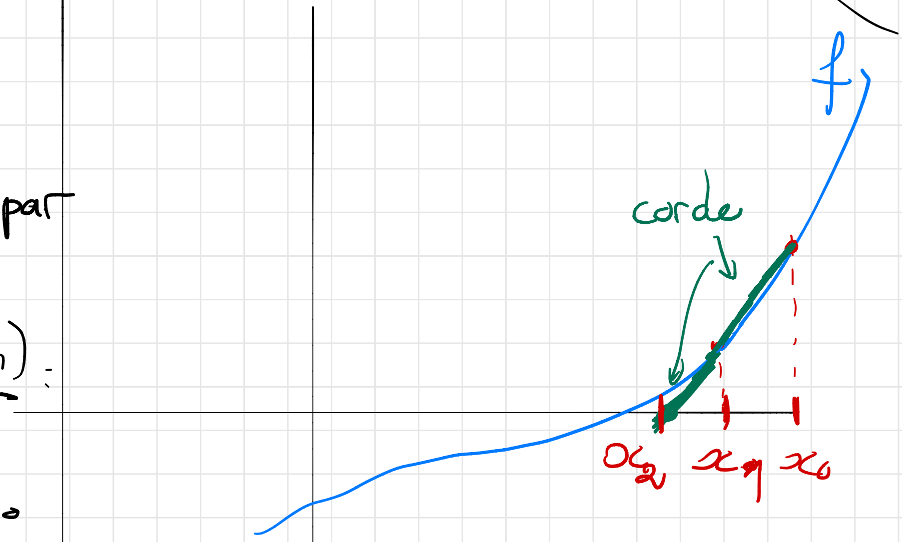
La convergence reste géométrique mais peut être quadratique.

# * Méthode de la sécante

Idée : s'inspirer de la méthode de Newton en remplaçant $f'(x_n)$ par une approximation :

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} \,:$$

$$\begin{cases} x_0 \in V,\ x_1 \in V,\ x_1 \neq x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \\ (n \geq 1) \end{cases}$$




On montre que sous les mêmes hypothèses que Newton ($f(\bar{x}) = 0$, $f'(\bar{x}) \neq 0$), il existe un voisinage de $\bar{x}$ par lequel la suite est correctement définie et converge vers $\bar{x}$ avec l'ordre $p = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (voir poly)

## Aspects numériques

→ sensibilité des méthodes (Newton ou sécante) aux données initiales (chaos)

→ coût important de calcul de $Df(x)^{-1}$ (Newton).

→ instabilité numérique par la méthod de la sécante ($f(x_n) \approx f(x_{n-1})$)

→ convergence très rapide (4 à 5 itérations au maximum).

## 4) Accélération de convergence

(voir Poly : méthode $\Delta^2$ d'Aitken)

→ Steffessen

# Exercices : TD n°2

## Ex 1 :

$\bar{x}$ zéro de $f$ de multiplicité $m > 1$

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

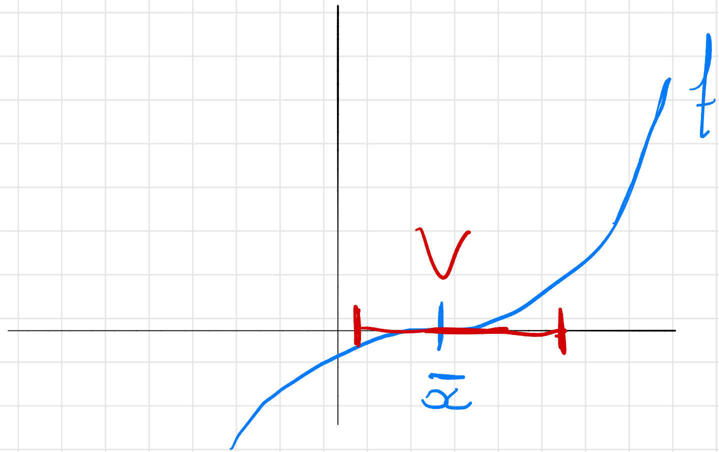
cv converge avec vitesse d'ordre $m$ ?

* $f(\bar{x}) = 0$
* $f'(\bar{x}) = 0 = \dots = f^{(m-1)}(\bar{x})$
* $f^{(m)}(\bar{x}) \neq 0$

$\longrightarrow (x_n)$ bien définie ? $(x_n \neq \bar{x})$

Il existe $V$ voisinage de $\bar{x}$ tq

$\forall x \in V,\ x \neq \bar{x} \Rightarrow f'(x) \neq 0$




On a $g(x) = x - m \dfrac{f(x)}{f'(x)}$

$$g'(x) = 1 - m\left(\frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{f'^2(x)}\right)$$

$g(\bar{x}) = 0$ et $g'(\bar{x}) = ?$

On a de plus

$$f(x_n) = f(\bar{x}) + 0 + \dots + \frac{(x-\bar{x})^m}{m!} f^{(m)}(\bar{x}) + o((x_n-\bar{x})^m)$$

$(?)$

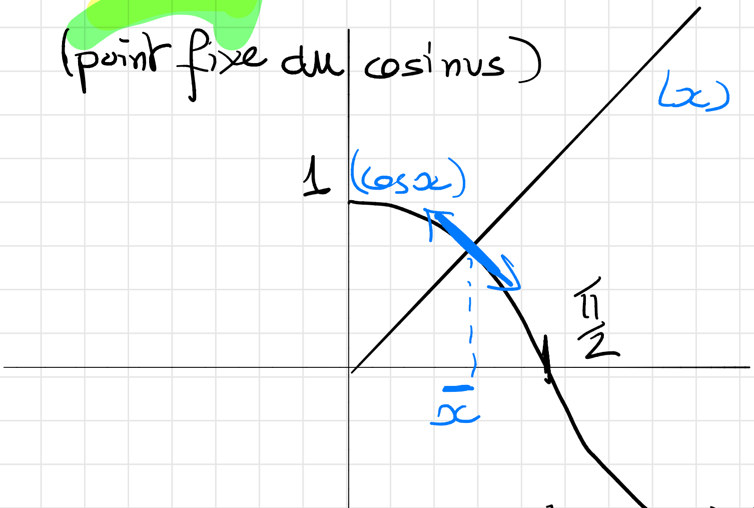
(à poursuivre)

Remarque : méthode purement théorique ("$m$" inconnu)

# TP n°2

* Ex 1 : $\cos x - x = 0$

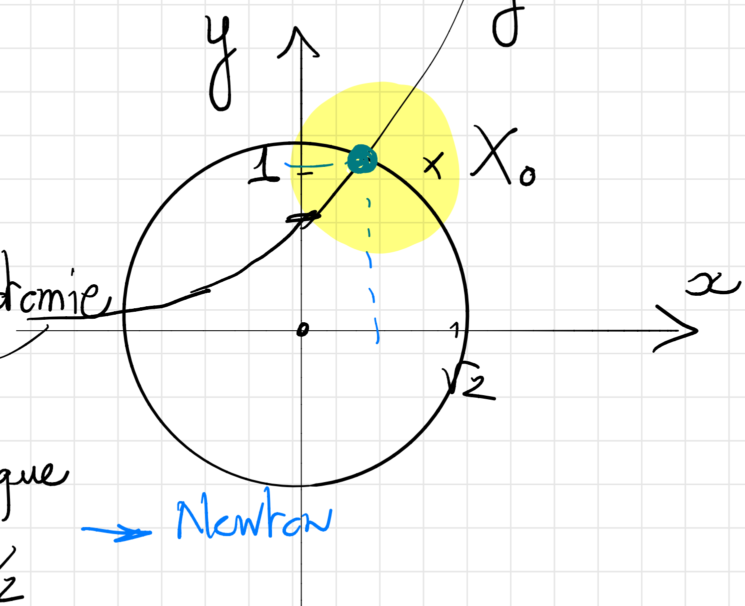
(point fixe du cosinus)




* Ex 3

$$\begin{cases} e^{x} - y = 0 & (x, y > 0) \\ x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$y = e^{x}$




* Comparaison Newton − Pt fixe − dichotomie

Newton : quadratique

Pt fixe : géométrique, $K = |\sin \bar{x}|$

dichotomie : géométrique, $K = 1/2$ → Newton

$$f : \left( \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (y - e^x, x^2 + y^2) \end{array} \right)$$

$$Df(x,y) : \begin{pmatrix} -e^x & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

$\to$ inverse OK (si $\underbrace{-2ye^x - 2x}_{<0} \neq 0$)

$\to$ $X_{n+1} = X_n - Df(X_n)^{-1} . f(X_n)$

si $X_0$ proche de $\bar{x}$, $X_n \to \bar{x}$

## Ex 4 (GPS)

à faire (réponse sur la position de P ?)

Newton bien adapté au problème :

$\to$ rapide et précise

$\to$ initialisation proche de la solution.

Sur l'exemple tester

$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (centre de la terre)

et vérifier que

$\| X_n \| \simeq 6400$ km