Séance 7 : recherche (numérique) de valeurs propres et vecteurs propres

→ Problème différent de la résolution de systèmes linéaires, calcul de déterminant, recherche d'inverse.

→ Même la notion de conditionnement diffère.

→ Il n'existe pas de méthode "exacte" (au sens de la méthode de Cramer ou de Gauss)

→ Nombreuses applications (voir textes : modèle de Leontieff, modèle de Leslie, matrice de Google)

1) Introduction

On définit tout d'abord la nouvelle notion de conditionnement :

Def : soit $|||\ |||$ une norme subordonnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est diagonalisable, on note

$$\Gamma(A) = \operatorname{Inf}_{(P \text{ tq } P^{-1}AP \text{ diagonale})} (\operatorname{cond} P)$$

appelé conditionnement spectral de A

(si A symétrique, $\Gamma(A) = 1$ par $|||\ |||_2$ car $\operatorname{cond}_2(Q) = 1$)

$\Gamma(A)$ représente bien l'amplification d'erreur commise suite à une erreur d'arrondi sur A comme en atteste le théorème suivant :

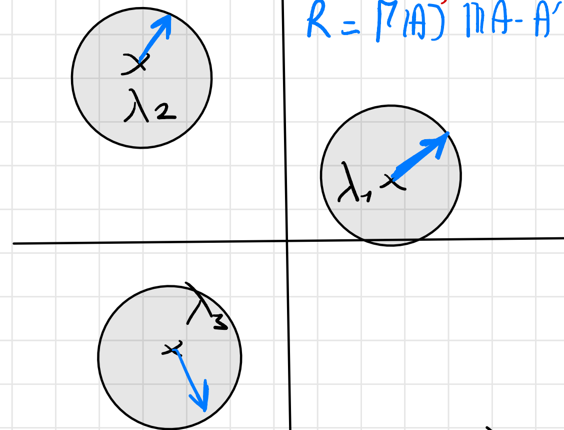
Théorème : on suppose que la norme subordonnée utilisée est telle que

$$\left|\left|\left|\begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}\right|\right|\right| = \max_{1 \leq i \leq n} |d_i|$$

(vrai pour $|||\cdot|||_1$, $|||\cdot|||_2$, $|||\cdot|||_\infty$)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Alors $Sp_{\mathbb{C}}(A') \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\lambda_i, \Gamma(A) |||A' - A|||)$



$R = \underbrace{\Gamma(A)}_{\text{amplification}} |||A - A'|||$

Preuve : soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A')$ et P tq $P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Soit

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix}. \text{ On a}$$

$$\underbrace{P^{-1}(A' - \lambda I)P}_{\text{non inversible}} = P^{-1}(A' - A)P + D$$

$$= \underbrace{D}_{\text{inversible}}\underbrace{(Id + D^{-1}P^{-1}(A' - A)P)}_{B}$$

$\to$ B non inversible.

Or, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tq $|||A||| < 1$, alors $I - A$ est inversible (en effet $B = \sum_{i=0}^{n} A^i$ est convergente et

$$(I-A).B = I \quad)$$

Ainsi, $|||D^{-1}P^{-1}(A'-A)P||| \geq 1$

soit a fortiori :

$$\underbrace{|||D^{-1}|||}_{\text{Max}\left(\frac{1}{|d_i|}\right)} . \text{cond}(P) . |||A'-A||| \geq 1$$

$$\Rightarrow \quad \underset{1 \leq i \leq n}{\text{Max}} |\lambda_i - \lambda| \leq \text{cond}(P) |||A'-A|||$$

//

(par exemple, la matrice de Hilbert est très bien conditionnée pour la recherche de ses valeurs propres alors qu'elle est très mal conditionnée pour la résolution de systèmes linéaires).

Pour $n \geq 5$, il n'existe pas de méthode "exacte". En effet, si cela était le cas, il serait possible de déterminer exactement les valeurs propres de matrices compagnon :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$ pour lesquelles

$$\chi_A(\lambda) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0.$$

(on aurait alors une méthode exacte de recherche de racines de polynômes).

2) Méthode de Jacobi

Il s'agit d'une méthode permettant de déterminer tout le spectre d'une matrice symétrique. Dans certains cas, elle permet aussi de trouver les vecteurs propres associés. Elle consiste à faire apparaître des zéros hors de la diagonale de A par matrice orthogonalement semblable et à exhiber sur la diagonale les valeurs propres.

On démontre auparavant deux lemmes :

Lemme 1 Soit $Q_{p,q}(\theta)$ la matrice orthogonale de rotation

$$Q_{p,q}(\theta) = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} \quad & \quad & p & \quad & q & \quad & \quad \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ \\ p \\ \\ q \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & 0 & & & 0 \\ 0 & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & \ddots & & 0 & \\ 0 & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & \ddots & \\ & 0 & & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

On note

$B = {}^tQ_{p,q}(\theta)\, A\, Q_{p,q}(\theta)$. Alors

$\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ De plus, il existe

$\theta \in [-\pi/4, \pi/4] \setminus \{0\}$ (en supposant $a_{p,q} \neq 0$)

tel que $\begin{cases} b_{p,q} = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + 2a_{p,q}^2 \end{cases}$

preuve : on utilise la norme de Frobenius :

$$\|B\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tBB)} = \sqrt{\sum_{i,j} b_{ij}^2}$$
$$= \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tQ\,{}^tAAQ)}$$
$$= \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAAQ\,{}^tQ)}$$
$$= \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$$
$$= \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$$

Pour la 2ème partie, tout se passe comme en dimension $n=2$, pour laquelle on fait un calcul explicite :

$$\begin{cases} b_{11} = -2a_{1,2}\sin\theta\cos\theta + a_{11}\cos^2\theta + a_{2,2}\sin^2\theta \\ b_{1,2} = b_{2,1} = a_{2,1}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + (a_{1,1} - a_{2,2})\sin\theta\cos\theta \\ b_{22} = 2a_{1,2}\sin\theta\cos\theta + a_{11}\sin^2\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{cases}$$

On choisit $\theta \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \setminus \{0\}$ tel que

$$\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} = \underbrace{\mathrm{cotan}(2\theta)}_{\text{bijection de } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\} \text{ sur } \mathbb{R}} = \underbrace{-\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{2,1}}}_{(\in \mathbb{R})}$$

On peut donc trouver θ tq $b_{2,1} = b_{1,2} = 0$

On a alors $b_{11}^2 + b_{22}^2 = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2a_{2,1}^2$

Ceci s'étend en dimension n sous la forme :

$$\sum_{i=1}^n b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^n a_{ii}^2 + 2a_{p,q}^2$$

Lemme 2 : soit $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^n$ tq

(i) M_k est bornée

(ii) $\| M_{k+1} - M_k \| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

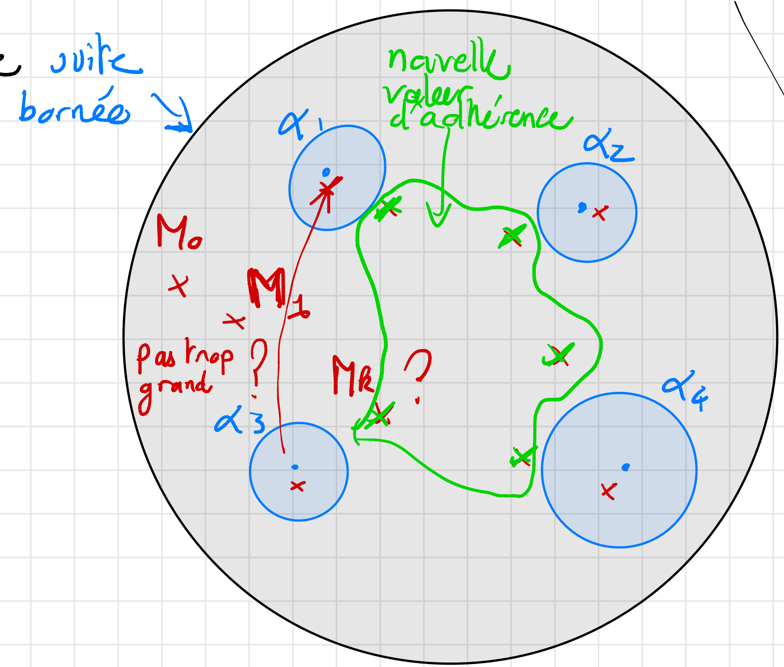
(iii) M_k a un nombre fini de valeurs d'adhérence.

Alors la suite (M_k) converge.

preuve : (voir poly)

Idée de la preuve sur un dessin :

(par l'absurde, on suppose qu'il y a au moins 2 valeurs d'adhérence)



A présent, on énonce le résultat et l'algorithme de construction de la méthode de Jacobi :

Théorème : soit A symétrique de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \dots \leq \lambda_n$.

On construit la suite de matrices $A_k = [a_{i,j}^k]$ telle que $A_0 = A$ et

$$A_{k+1} = {}^tQ_{p_k q_k}(\theta_k)\, A_k\, Q_{p_k, q_k}(\theta_k)$$

où (p_k, q_k) est tel que

$$|a_{p_k, q_k}^k| = \max_{i \neq j} |a_{i,j}^k| \text{ et } \theta_k$$

tel que $a_{p_k, q_k}^{k+1} = 0$ (voir Lemme 1).

Alors, il existe une permutation σ de $\{1, \dots, n\}$ telle que

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lambda_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{\sigma(n)} \end{pmatrix}}$$

preuve (complète : voir poly)

Etapes de la preuve :

$\rightarrow$ $A_k = \underbrace{D_k}_{\text{partie diagonale}} + B_k$ et on note

$$\varepsilon_k = \mathrm{Tr}({}^tB_k B_k) \left(= \|B_k\|^2\right)$$

1) On montre que $\varepsilon_k \rightarrow 0$ (soit $B_k \rightarrow 0$)

$\left(\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2(a_{p_k, q_k}^k)^2 \right.$ puis

$$\left. 0 \leq \varepsilon_{k+1} \leq \left(1 - \frac{2}{n(n-1)}\right)\varepsilon_k \right)$$

2) D_k converge vers $\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$

On montre que D_k vérifie les hypothèses du Lemme 2.

* D_k bornée

* si D valeur d'adhérence de (D_k)

Alors
$$\det(D-\lambda I) = \lim_{k\to+\infty} \det(D_{\alpha(k)}-\lambda I)$$
$$= \lim_{k\to+\infty} \det(A_{\alpha(k)}-\lambda I)$$
$$= \det(A-\lambda I)$$
Forcément D est de la forme

$$\operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}).$$

* $\|D_{k+1} - D_k\| \to 0$ (calcul explicite)

3) (D_k) converge vers une certaine matrice

$$\operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)}). \quad //$$

Les vecteurs propres peuvent se déduire également si A est à valeurs propres simples :

Théorème : Si A est valeurs propres simples et sous les hypothèses et notations du théorème précédent, alors

$$Q_K = \prod_{k=1}^{K} Q_{p_k, q_k}(\theta_k)$$

(lorsque $K \to +\infty$) converge vers une matrice orthogonale dont les colonnes représentent des vecteurs propres de A par les valeurs propres dans le même ordre que $\lim_{k\to+\infty}(A_k)$.

Preuve : voir poly

(On utilise à nouveau le Lemme 2)

→ Implémentation et test sur la matrice du Laplacien.

3. Méthode QR

Il s'agit d'une méthode de recherche de valeurs propres par des matrices assez générales. Elle est basée sur une succession de factorisation QR d'une matrice.

Théorème : soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module différent $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ldots > |\lambda_n| > 0$

Soit P tq $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

On suppose que P^{-1} admet une factorisation LU

Alors la suite (A_k) telle que

$$A_1 = A = Q_1 R_1$$

$$A_2 = R_1 Q_1 = Q_2 R_2 \qquad Q_1^T (\underbrace{Q_1 R_1}_{A_1}) Q_1$$

$$\vdots$$

$$A_k = R_{k-1} Q_{k-1} = Q_k R_k$$

$$\vdots$$

est telle que $\lim\limits_{k \to +\infty} (A_k)_{i,i} = \lambda_i$

et $\lim\limits_{k \to +\infty} (A_k)_{i,j} = 0$ (si $i > j$)

$$\left(A_k \simeq \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \right)$$

preuve (cf Ciarlet)

4) Méthode de Givens-Householder

Il s'agit d'une méthode permettant de rechercher une valeur propre particulière (dans un ordre croissant) d'une matrice symétrique. Le principe consiste à se ramener au cas d'une matrice tridiagonale grâce aux matrices de Householder (cf TD5) puis à construire une suite de Sturm de polynômes par ces matrices tridiagonales.

(Enoncé, algorithme et démonstration dans Ciarlet)

5) Méthode de la puissance et de la puissance inverse

Il s'agit d'une méthode de recherche d'un vecteur propre associé à une valeur propre déjà estimée (par exemple la plus grande en module). Le principe consiste à construire une suite itérative du type $u_{n+1} = A u_n$ (ou $(A-\lambda I)u_{n+1} = u_n$)

puissance

puissance inverse.

Théorème (puissance inverse) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. On suppose avoir calculé $\tilde{\lambda}$ approximation de λ tq

$\forall \mu \in Sp_{\mathbb{C}}(A) \setminus \{\lambda\}$, $|\mu - \tilde{\lambda}| > |\lambda - \tilde{\lambda}|$

Soit $u_0 \in \mathbb{C}^n$ tq u_0 ne soit pas le sous espace $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} E_\mu$. Alors la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $(A - \tilde{\lambda} I) u_{k+1} = u_k$ est telle que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(\lambda - \lambda)^k}{|\lambda - \tilde{\lambda}|^k} \frac{u_k}{\|u_k\|} = q$$

où q est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

preuve : exercice (ou Ciarlet) en partant de : $u_0 = \underbrace{\tilde{u}}_{\in E_\lambda (\neq 0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \underbrace{u_{\mu_i}}_{\in E_{\mu_i}}$

Cette méthode est fréquemment utilisée dans de nombreuses applications (voir TD7 et textes)

→ TD7 : travail à répartir en 3 groupes associés aux 3 textes

→ semaine prochaine : résultats théoriques (TD7)

→ semaine suivante : préparer une restitution (30') des textes avec implémentation