

# Séance 8 : minimisation d'une fonctionnelle quadratique

## 1) Définitions, premiers résultats

Def : soit  $A$  une matrice symétrique définie positive ( $A \gg 0$ ) et  $b \in \mathbb{R}^n$ .

On note  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  la fonctionnelle :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad J(x) = \frac{1}{2} \underbrace{\langle Ax, x \rangle}_{b^T x (Ax)} - \underbrace{\langle b, x \rangle}_{b^T x}$$

On a les résultats suivants :

$J$  est  $C^\infty$  et

$$\rightarrow \nabla J(x) = Ax - b \quad (\in \mathbb{R}^n)$$

$$(J(x+h) = J(x) + \langle \nabla J(x), h \rangle + o(\|h\|))$$

$$\rightarrow HJ(x) = A \quad (\in S_n(\mathbb{R}))$$

$$(\nabla J(x+h) = \nabla J(x) + \langle \nabla J(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle HJ(x)h, h \rangle + o(\|h\|^2))$$

$J$  est strictement convexe :

$$(HJ(x) \gg 0) \quad J(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda J(x) + (1-\lambda)J(y) \\ (\text{si } x \neq y \text{ et } \lambda \in ]0, 1[)$$

$J$  est coercive :  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$

$$(J(x) \geq \frac{\lambda}{2} \|x\|^2 - \|b\| \|x\| \text{ où } \lambda > 0 \text{ plus petite valeur propre de } A)$$

Proposition :  $J$  possède un unique minimum global sur  $\mathbb{R}^n$ . Celui-ci est caractérisé par la condition

$$\nabla J(x) = 0 \text{ soit : } Ax = b$$

preuve :

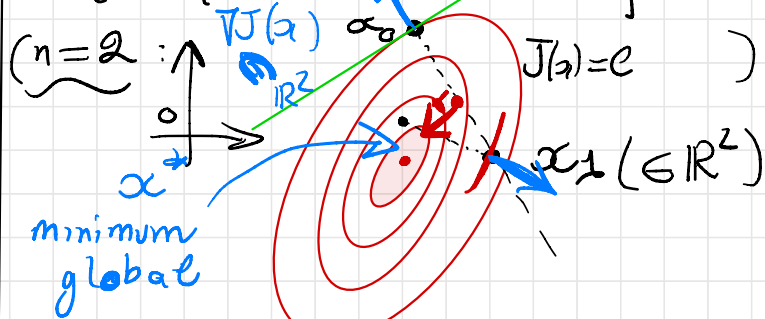
\*  $J$  est coercive  $\Rightarrow J$  possède au moins un minimum global (on se ramène à une boule où  $J$  atteint ses bornes)

\*  $J$  est strictement convexe  $\Rightarrow$  le minimum de  $J$  est unique.

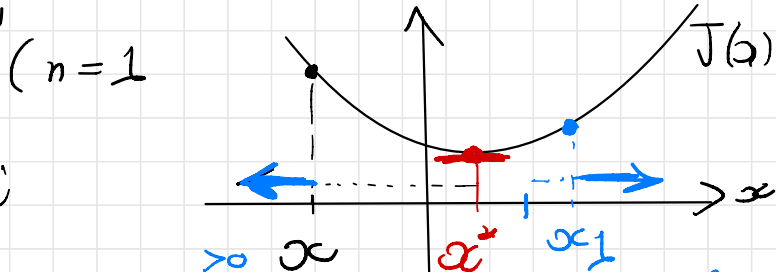
\* Tout minimum est point critique. Ainsi l'unique minimum vérifie  $\nabla J(x) = Ax - b = 0$

\* lignes de niveau de  $J$  : si  $l \in \mathbb{R}$

$$C_l = \{x \in \mathbb{R}^n / J(x) = l\}$$



si  $x \in C_l$ ,  $\nabla J(x)$  est orthogonal à  $C_l$  (ou son hyperplan tangent) et dirigé vers les valeurs croissantes (\*)



$$(*) J(x + \alpha \nabla J(x)) = J(x) + \alpha \|\nabla J(x)\|^2 + o(\alpha)$$

\* si  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\nabla J(x) \neq 0$ , alors

$$J(x - \alpha \nabla J(x)) < J(x) \text{ si}$$

$\alpha \in ]0, \frac{2}{\rho(A)}[$  ( $\rho(A)$ : rayon spectral  
égal ici à  $\lambda_n$ , plus grande valeur propre de  $A$ )

En effet, si on note  $\delta = -\alpha \nabla J(x)$ , on a

$$J(x + \delta) = J(x) + \langle Ax - b, \delta \rangle + \frac{1}{2} \langle A\delta, \delta \rangle$$

$$= J(x) - \alpha \|\nabla J(x)\|^2 + \frac{1}{2} \langle A\delta, \delta \rangle$$

$$\leq J(x) - \alpha \|\nabla J(x)\|^2 + \frac{\alpha^2}{2} \rho(A) \|\nabla J(x)\|^2$$

$$\leq J(x) - \alpha \underbrace{(1 - \alpha \rho(A))}_{> 0 \text{ si } \alpha \in ]0, \frac{2}{\rho(A)}[} \|\nabla J(x)\|^2$$

$> 0$  si  $\alpha \in ]0, \frac{2}{\rho(A)}[$

## 2) Algorithmes de minimisation / 3 du gradient

Pour approcher  $x^*$ , minimum global de  $J$  (et solution de  $Ax = b$ ), on propose la méthode suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_k = \alpha_k - \alpha \nabla J(x_k) \end{cases} \quad \text{avec } \alpha_k = \frac{\langle Ax_k - b, \nabla J(x_k) \rangle}{\|\nabla J(x_k)\|^2}$$

avec  $\alpha \in ]0, \frac{2}{\rho(A)}[$   
qu'on appelle méthode du gradient à pas fixe.

On cherche à montrer que  $x_k \rightarrow x^*$

On a le résultat suivant :

Théorème : la méthode du gradient  
à pas fixe (avec  $\alpha \in ]0, \frac{2}{L}[$ )

converge : par tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{P}(A)$

$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = x^*$  unique minimum de  $J$

preuve : avec le résultat précédent :

$$J(x_{k+1}) \leq J(x_k) - \alpha \left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right) \|\nabla J(x_k)\|^2$$

En sommant de 0 à N, on a :

$$\underbrace{\alpha \left(1 - \frac{\alpha L}{2}\right)}_{> 0} \sum_{k=0}^N \|\nabla J(x_k)\|^2 \leq \underbrace{J(x_0) - J(x_N)}_{\text{minorée}} \underbrace{\leq}_{\text{majorée}}$$

La série  $\sum_{k=0}^N \|\nabla J(x_k)\|^2$  à  $\frac{4}{}$

termes positifs est majorée, donc convergente

On en déduit donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0 \quad (ck)$$

De plus  $(x_k)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^n$   
car  $J(x_k) \leq J(x_0) \forall k \in \mathbb{N}$

et  $J$  est coercive. Elle possède  
donc une valeur d'adhérence  $\hat{x}$ . On a

$\nabla J(\hat{x}) = \mathbf{0}$  (avec (ck)), ce  
qui implique  $\hat{x} = x^*$ . La suite  
 $(x_k)$  a une seule valeur d'adhérence  
 $\Rightarrow$  elle converge.

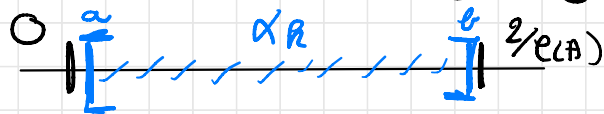
Remarque: on retrouve le résultat du chapitre consacré aux méthodes itératives pour la résolution de systèmes linéaires (méthode du gradient: voir TD 6)

Il existe deux variantes à la méthode du gradient à pas fixe:

\* Méthode du gradient à pas variable:

$$\begin{cases} \alpha_0 \in \mathbb{R}^n \\ \alpha_{k+1} = \alpha_k - \alpha_k \nabla J(\alpha_k) \end{cases}$$

avec  $\alpha_k \in [a, b] \subset ]0, \frac{2}{\rho(A)}[$



Cette méthode a le même résultat

de convergence:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha$

5

\* Méthode du gradient à pas optimal: l'idée

consiste à choisir  $\alpha_k$  tel que  $\alpha \mapsto J(\alpha_k - \alpha \nabla J(\alpha_k))$  soit minimale en  $\alpha_k$ .

On peut montrer que

$$\alpha_k = \frac{\|r_k\|^2}{\langle Ar_k, r_k \rangle} \quad \text{où}$$

$$r_k = A\alpha_k - b \quad (\text{exercice})$$

Dans ce cas, on montre à nouveau que  $\alpha_k \rightarrow \alpha^*$

Remarque : d'un point de vue numérique, ces trois méthodes ont des vitesses de convergence similaire (voir implémentations Scilab/Python). Pour avoir une meilleure vitesse de convergence, il est nécessaire de changer la direction de descente :

$$d_k = -\nabla J(x_k).$$

### 3) Algorithme du gradient conjugué

L'idée de cette méthode consiste à améliorer la direction de descente au cours des itérations pour converger plus rapidement vers  $x^*$ .

### 3.1) Résultat théorique

Théorème : soit  $A \gg 0$  et  $b \in \mathbb{R}^n$ ;

soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , on note

$$K_k(r_0) = \text{Vect}(\{r_0, \dots, A^k r_0\}) \text{ où}$$

$r_0 = b - Ax_0$ . Il existe une unique suite  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telle que :

(i)  $r_{k+1} = b - Ax_{k+1}$  est orthogonal à  $K_k(r_0)$

ou

(ii)  $x_{k+1}$  minimise la fonctionnelle  $J$  sur l'espace affine  $x_0 + K_k(r_0)$ .

Ainsi définie, la suite  $x_k$  converge vers  $x^*$ .

en un nombre fini d'itérations (au plus  $n$ ),  
 preuve : on montre l'équivalence (et  
 la bonne définition) de  $x_{k+1}$  entre  
 (i) et (ii).

On s'intéresse à (ii) et on définit

$$g : (K_k(r_0) \rightarrow \mathbb{R})$$

$$y \mapsto J(x_0 + y)$$

On a

$$g(y) = \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle - \langle r_0, y \rangle + \frac{1}{2} \langle Ax_0, x_0 \rangle - \langle b, x_0 \rangle$$

On retrouve une fonctionnelle quadratique sur  $K_k(r_0)$ . Avec les résultats du §1, On retrouve une fonctionnelle quadratique de  $x_{k+1}$ , soit avec (ii) ou avec (i).

$g$  admet un unique minimum, noté  $x_{k+1}$ . On a en particulier

par tout  $y \in K_k(r_0)$ ,

$$g(x_{k+1} - x_0) \leq g(x_{k+1} - x_0 + y)$$

soit après simplifications :

$$\forall y \in K_k(r_0) \quad \frac{1}{2} \langle Ay, y \rangle + \langle Ax_{k+1} - b, y \rangle \geq 0$$

En remplaçant  $y$  par  $-y$ , on a nécessairement :

$$\langle Ax_{k+1} - b, y \rangle = 0 \quad \text{soit (i)}$$

On a bien exactement la caractérisation

de  $x_{k+1}$ , soit avec (ii) ou avec (i).

On montre la convergence en un nombre fini d'itérations de  $x_k$  vers  $x^*$ .

La suite des espaces de Krylov :

$$K_k(r_0) = \text{Vect} \{ r_0, \dots, A^k r_0 \}$$

est croissante par l'inclusion jusqu'à l'itération  $k_0 \leq n-1$ , après elle

stationne (si  $k_0 = n-1$ ,  $K_{k_0}(r_0) = \mathbb{R}^n$ )

Si  $k_0 = n-1$ , on a bien  $\alpha_{k_0+1} = \alpha^*$  (voir (ii))

Si  $k_0 < n-1$ , on remarque que

$$A^{k_0+1}(r_0) = \sum_{i=0}^{k_0} \alpha_i A^i(r_0) \text{ soit}$$

$\in K_{k_0}(r_0)$  (en remarquant que  $\alpha_0 \neq 0$ ; sinon...)

$$A \left( \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k_0} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} A^i(r_0) + \frac{A^{k_0}(r_0)}{\alpha_0} \right) = b$$

et donc

$$\alpha^* = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k_0} \frac{\alpha_i}{\alpha_0} A^i(r_0) + \frac{A^{k_0}(r_0)}{\alpha_0}$$

$$\in \alpha_0 + K_{k_0}(r_0)$$

ce qui implique avec (ii) que  $\alpha = \alpha_{k_0+1}^*$

### 3.2 Algorithme de construction

On mentionne un premier résultat utile :

Proposition : on a

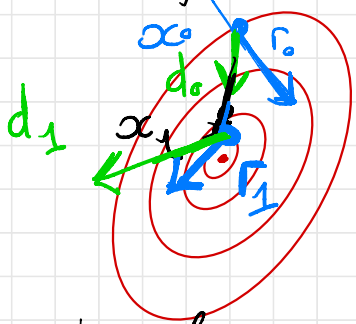
$$K_k(r_0) = \text{Vect}(r_0, \dots, r_k) = \text{Vect}(d_0, \dots, d_k)$$

où  $d_k = \alpha_{k+1} - \alpha_k$  (directions)

La famille des résidus  $\{r_0, \dots, r_k\}$  est orthogonale par le produit scalaire usuel



et la famille des directions  $\{d_0, \dots, d_k\}$  est orthogonale par le produit scalaire conjugué :  $\langle x, y \rangle_A = \langle Ax, y \rangle$



preuve : voir poly

Remarque : le nom de la méthode vient de l'orthogonalité "conjuguée" des directions de descente.

L'algorithme pratique de construction  $g$  est contenu dans le résultat suivant :

Théorème : soit  $A \succ \succ 0$  et  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

On définit les suites  $(\alpha_k)$ ,  $(r_k)$  et  $(p_k)$  de la manière suivante

$$\alpha_0, p_0 = b - Ax_0, r_0 = b - Ax_0$$

puis, pour  $1 \leq k \leq k_0$ ,

$$r_k = r_{k-1} - \alpha_{k-1} A p_{k-1}$$

$$p_k = r_k + \beta_{k-1} p_{k-1}$$

$$\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha'_{k-1} p_{k-1}$$

avec  $\alpha'_{k-1} = \frac{\langle r_{k-1}, r_{k-1} \rangle}{\langle A p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}$  et  $\beta_{k-1} = \frac{\langle r_k, r_k \rangle}{\langle r_{k-1}, r_{k-1} \rangle}$

Cette définition est liée et en particulier, la suite  $(x_k)$  correspondant à la suite du gradient conjugué définie précédemment ( $r_k$  : suite des résidus et  $p_k$  : suite des directions).

preuve : voir poly. (on utilise Gram Schmidt par le produit scalaire conjugué).

Remarque

1) Il s'agit aussi d'une méthode directe de résolution d'un système  $Ax = b$  avec  $A \gg 0$ . Cependant, elle nécessite

$2n^3$  opérations (au maximum). 10

Elle n'est pas utilisée ainsi mais plutôt comme méthode itérative.

2) Cette méthode ne nécessite pas le stockage de  $A$  mais seulement de  $Ax$ . (intéressant si  $A$  est creuse).

3) Il existe une estimation de l'erreur commise :

$$\|x_k - x^*\|_2 \leq 2 \sqrt{\kappa_A} \left( \frac{\sqrt{\kappa_A} - 1}{\sqrt{\kappa_A} + 1} \right)^k \|x_0 - x^*\|_2$$

où  $\kappa_A = \text{cond}_2(A)$ .

(à comparer avec gradient à pas fixe)  
TD6

# Séance 9 : présentation des textes de modélisation en algèbre linéaire

3 textes, 3 groupes (Me 11/11)

Leslie : Yassine, Marcoune, Karam

Google : Merjeme, Elhachime

Leontieff : Mohamed, Imad, Anas

Présentation du texte (40 min)  
(+ questions)

- \* Modélisation
- \* Quelques résultats théoriques
- \* (Implementation + résultats numériques  
Python)

à distance : préparer rapport écrit et  
partager l'écran //

Traitement de plusieurs aspects du texte en  
utilisant les suggestions proposées. /