

Séance 6 : résolution de systèmes linéaires par méthodes itératives

Le problème à résoudre est inchangé :
on cherche à approcher la solution de $Ax = b$ où $A \in GL_n(\mathbb{R})$ (bien conditionnée) et $b \in \mathbb{R}^n$.

On cherche à connaître à présent une suite d'approximations $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $x_k \rightarrow x$ lorsque $k \rightarrow \infty$.

La suite (x_k) sera construite de manière itérative : $x_{k+1} = f(x_k)$.

1) Principe général

Le principe repose sur la décomposition de A en $A = M - N$ où M est une matrice facile à inverser (diagonale ou triangulaire), puis à étudier la suite (x_k) telle que :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R}^n \\ x_{k+1} = M^{-1}(Nx_k + b) \end{cases}$$

En effet, si $x_k \rightarrow u$, alors

$$u = M^{-1}(Nu + b) \text{ soit } Mu - Nu = b \text{ et } u = x$$

Definition : on dit que la méthode itérative associée à la décomposition (M, N) de A est convergente si la suite (x_k) converge pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

On a le théorème fondamental suivant :

Théorème : la méthode itérative associée à la décomposition (M, N) de A converge si et seulement si $\rho(M^{-1}N) < 1$

rayon spectral

preuve :

(i) On suppose que $\rho(M^{-1}N) < 1$. On sait (voir séance 3) qu'il existe une norme subordonnée $\| \cdot \|$ telle que

$\| M^{-1}N \| < 1$. Avec cette norme, en notant $e_k = x_k - x$, on a

$$x_{k+1} - x = M^{-1}(Nx_k + b) - M^{-1}(Nx + b)$$

$Mx = Nx + b$

soit $e_{k+1} = M^{-1}N e_k$ puis

$$\| e_{k+1} \| \leq \| M^{-1}N \| \cdot \| e_k \| \text{ et}$$

$$\| e_k \| \leq (\| M^{-1}N \|)^k \| e_0 \|$$

d'où $e_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$

(ii) si $\rho(M^{-1}N) \geq 1$, on note u un vecteur propre de $M^{-1}N$ associé à une valeur propre de module ≥ 1 : $u = u_1 + i u_2$

En initialisant la suite avec $x_0 = u + v$
on a $e_1 = M^{-1}N e_0 = M^{-1}N u = \lambda u$

puis :

$$e_k = \lambda^k u$$

On ne peut avoir $e_k \rightarrow 0$ car
 $k \rightarrow +\infty$

$$\|e_k\| \geq \|u\| > 0.$$

Le théorème précédent se simplifie lorsque
 A est définie positive $(A \gg 0)$:

Théorème : soit $A \gg 0$. Par la
méthode itérative associée à la décom-
position (M, N) , on a ${}^t M + N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
(*) en particulier symétrique

Si de plus ${}^t M + N \gg 0$, alors
la méthode est convergente. 3

preuve :

$$\begin{aligned} {}^t({}^t M + N) &= M + {}^t N = A + N + {}^t N \\ &= {}^t A + {}^t N + N \\ &= {}^t M + N \end{aligned}$$

Si de plus ${}^t M + N \gg 0$, on cherche
une norme subordonnée telle que
 $\|M^{-1}N\| < 1$ (et alors $\rho(M^{-1}N) < 1$)

On utilise la norme subordonnée à
la norme $\|x\|_A = \sqrt{\langle Ax, x \rangle}$
(c'est bien une norme si $A \gg 0$)
On calcule $\|M^{-1}N x\|_A$:

$$\begin{aligned}
\|M^{-1}Nx\|_A^2 &= \langle AM^{-1}Nx, M^{-1}Nx \rangle \\
&= \langle AM^{-1}(M-A)x, M^{-1}(M-A)x \rangle \\
&= \langle Ax - AM^{-1}Ax, x - M^{-1}Ax \rangle \\
&= \langle Ax, x \rangle - \langle AM^{-1}Ax, x \rangle - \langle Ax, M^{-1}Ax \rangle \\
&\quad + \langle AM^{-1}Ax, M^{-1}Ax \rangle \\
&= 1 - \langle w, M^{-1}Ax \rangle - \langle M^{-1}Aw, w \rangle + \langle Aw, w \rangle
\end{aligned}$$

(On suppose $\|x\|_A = 1$) où $w = M^{-1}Ax$, soit :

$$\begin{aligned}
\|M^{-1}Nx\|_A^2 &= 1 - \langle M^{-1}Aw, w \rangle - \langle M^{-1}Aw, w \rangle \\
&\quad + \langle Aw, w \rangle \\
&= 1 - \langle (M^{-1}M - A)w, w \rangle \\
&\quad \leq 1
\end{aligned}$$

Or $w \neq 0$ si $x \neq 0$ et alors $\langle (M^{-1}M - A)w, w \rangle > 0$ car $M^{-1}M \gg 0$

Remarque : si la méthode converge, la vitesse de convergence est géométrique avec un coefficient $\rho(M^{-1}N)$ (plus cette valeur est petite, plus la convergence est rapide).

2) Méthodes de Jacobi et Gauss Seidel

Déf : on appelle méthode de Jacobi la méthode itérative associée à la décomposition :

$$\begin{aligned}
M &= \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = D \\
N &= M - A = D - A
\end{aligned}$$

$$\text{On note } J = M^{-1}N = D^{-1}(D-A) \\ = \text{Id} - D^{-1}A$$

Remarque: la méthode est seulement définie par les matrices A telles que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{ii} \neq 0$. Elle est convergente seulement si $\rho(J) < 1$.

L'implémentation de la méthode consiste à construire la suite $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$ telle que

$x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} (-a_{i1}x_k^1 - \dots - a_{i,i-1}x_k^{i-1} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} - \dots - a_{in}x_k^n + b_i)$$

$$(1 \leq i \leq n)$$

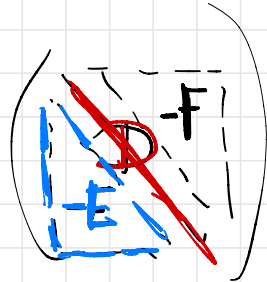
$$(x_{k+1} = D^{-1}((D-A)x_k + b))$$

en opérations (n fois)

La méthode de Gauss Seidel s'inspire de la méthode de Jacobi en remplaçant D par la partie triangulaire inférieure de A :

Def: on écrit

$$A = \underbrace{D}_{\text{diagonale}} - \underbrace{E}_{\text{partie inférieure stricte}} - \underbrace{F}_{\text{partie supérieure}} =$$



valeurs à l'itération $k+1$

Def: on appelle méthode de Gauss Seidel la méthode itérative associée à la décomposition $A = M - N$ avec

$$\begin{cases} M = D - E \\ N = M - A = F \end{cases}$$

On note $Z_1 = M^{-1}N = (D - E)^{-1}F$

Remarque: comme par Jacobi, la méthode est seulement définie si $a_{ii} \neq 0, \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Elle est convergente si $\rho(Z_1) < 1$.

R'implémentation n'est pas plus coûteuse que celle de Jacobi: si $x_k = (x_k^1, \dots, x_k^n)$, on a l'itération suivante:

$$x_{k+1}^i = \frac{1}{a_{ii}} \left(-a_{i1}x_{k+1}^1 - \dots - a_{i,i-1}x_{k+1}^{i-1} - a_{i,i+1}x_k^{i+1} - \dots - a_{in}x_k^n + b_i \right)$$

Dans le cas où A est symétrique définie positive:

* par Jacobi, $t_{M+N} = 2D - A$ (pas forcément $\gg 0$)

* par Gauss Seidel, $t_{M+N} = D - E + F = D \gg 0$ (par Sylvester) et donc la méthode de Gauss Seidel converge

De manière assez générale, la méthode de Gauss Seidel est plus performante que la méthode de Jacobi. Ceci est par exemple le cas si A est tridiagonale :

Proposition : soit A tridiagonale.

Si les méthodes de Jacobi et de Gauss Seidel convergent, alors,

$$\rho(R_1) = \rho(J)^2$$

(et la méthode de Gauss Seidel est donc plus efficace).

preuve : (voir poly). On détermine une relation entre les polynômes caractéristiques

de R_1 et de J :

$$\chi_{R_1}(\lambda^2) = C \lambda^n \chi_J(\lambda)$$

3) Autres méthodes itératives

→ méthode de relaxation (SOR) qui étend la méthode de Gauss Seidel.

→ méthode du gradient, qui rejoint une méthode d'optimisation.

3.1) Méthode de relaxation (ou SOR)

(*) successive overrelaxation

L'idée consiste à ne prendre dans M

qu'une fraction de la diagonale de A :

Déf: la méthode SOR consiste à prendre la décomposition suivante:

$$M = \frac{1}{\omega} D - E$$

$$N = M - A = \left(\frac{1}{\omega} - 1\right) D + F$$

où ω (paramètre de relaxation) est > 0 .

$$\text{On note } \mathcal{L}_\omega = M^{-1}N$$

(on retrouve bien Gauss-Seidel si $\omega = 1$)

Le paramètre ω se situe nécessairement dans $]0, 2[$ car on a

$$\begin{aligned} |\det(\mathcal{L}_\omega)| &= |\det(N) / \det(M)| \\ &= \frac{\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)^n}{\left(\frac{1}{\omega}\right)^n} \end{aligned} \quad \text{8}$$

$$= |\omega - 1|^n$$

si $\omega \notin]0, 2[$, $|\det(\mathcal{L}_\omega)| \geq 1$ et on ne peut avoir $\rho(\mathcal{L}_\omega) < 1$ car

$$|\det(\mathcal{L}_\omega)| = \prod_{i=1}^n |\lambda_i|$$

Réciproquement, si $A \gg 0$ et $\omega \in]0, 2[$

on a

$$M + N = \left(\frac{2}{\omega} - 1\right) D = \left(\frac{2 - \omega}{\omega}\right) D$$

$\gg 0$

et la méthode converge.

Il existe dans ce cas une valeur optimale par ω :

Théorème : soit A symétrique définie positive et tridiagonale. Alors les méthodes de Jacobi, Gauss Seidel et SOR (avec $\omega \in]0, 2[$) convergent. De plus, il existe un unique $\omega_{opt} \in]0, 2[$ tel que $\rho(L_{\omega_{opt}}) = \min_{\omega \in]0, 2[} \rho(L_{\omega})$. On a

$$\omega_{opt} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(A)^2}} \geq 1 \text{ et}$$

$$\rho(L_{\omega_{opt}}) = \omega_{opt} - 1$$

preuve (voir Ciartlet)

(Introduction à l'analyse numérique matricielle)

Illustration (voir code Salab)

3.2 Méthode du gradient

L'idée, différente des précédentes, consiste à effectuer une décomposition avec M matrice du type αI_n :

Déf : on appelle méthode du gradient, la méthode associée à la décomposition :

$$M = \frac{1}{\alpha} I$$

$$N = M - A = \frac{1}{\alpha} Id - A$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Cette méthode est toujours définie et une itération s'écrit :

$$x_{k+1} = \alpha \left(\frac{1}{2} \text{Id} - A \right) x_k + b \\ = x_k - \alpha (Ax_k - b)$$

(coût d'une itération $\alpha(n^2)$) \uparrow $\nabla J(x_k)$

La convergence de la méthode est obtenue avec le théorème suivant :

Théorème ^{soit} : $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ ayant par valeurs propres les réels

$$\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

ci) si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, la méthode ¹⁰ du gradient ne converge pas.

(ii) si $0 < \lambda_1$, la méthode du gradient converge ssi $\alpha \in]0, \frac{2}{\lambda_n}[$ et il existe un paramètre optimal :

$$\alpha_{\text{opt}} = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n} \text{ par lequel}$$

$$\rho(M^N) = \frac{\text{cond}_2 A - 1}{\text{cond}_2 A + 1} = \frac{\lambda_n - \lambda_1}{\lambda_n + \lambda_1}$$

preuve : voir TD6

Remarque : si $A \gg 0$, on retrouve une méthode de minimisation d'une fonctionnelle quadratique

$$J(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle - \langle b, x \rangle$$

Cette fonction admet un unique minimum x^* tel que

$$\nabla J(x^*) = Ax^* - b = 0$$

(voir séance "optimisation")

Exercice :

Implémenter une méthode itérative de votre choix, appliquée par exemple à la matrice du Laplacien discrétisé.

(→ email : laurent.dumas@lvsq.fr)

TDS :

Ex 1 et 2 : cas pratiques

(un cas où G.S. est moins performant que Jacobi)

Ex 3 : une nouvelle méthode itérative

Ex 4 : preuve de convergence du gradient.