séance 14 : résolution d'équations différentielles : méthodes de Runge-Kutta.

(suite de la séance 12 et 13)

1) Introduction et notations

$$(1)\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [t_0, t_0+T] \\ y(t_0) \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

(f C^0 et globalement Lipschitzienne)

2) Méthode d'Euler

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) f(t_n, y_n) \\ y \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

3) Méthodes à un pas

$$(2)\begin{cases} y_{n+1} = y_n + (t_{n+1} - t_n) \Phi(t_n, y_n, t_{n+1} - t_n) \\ y_0 \in \mathbb{R}^m \text{ fixé} \end{cases}$$

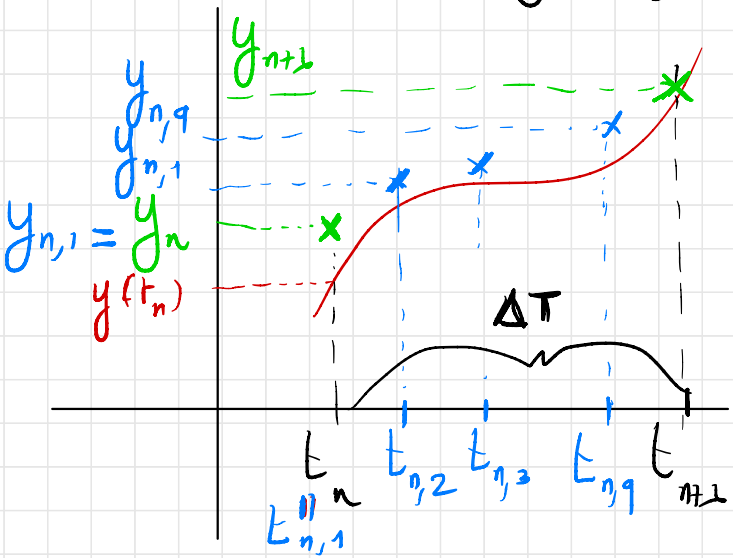
4) Consistance, stabilité, convergence, ordre : définitions

5) Consistance, stabilité, convergence, ordre : propriétés fondamentales

Fin des rappels

6) Méthodes de Runge Kutta

L'idée de ces méthodes consiste à utiliser des méthodes de quadrature plus précises que la méthode des rectangles à gauche pour passer de y_n à y_{n+1}



On se donne tout d'abord une famille

$$t_{n,1} = t_n \leq t_{n,2} \leq \dots \leq t_{n,q} \leq t_{n+1}$$

avec

$$t_{n,j} = t_n + c_j \, \Delta T$$

$$\left((c_j)_{1 \leq j \leq q} \in [0,1]^q \right)$$

puis on construit une suite d'approximations $(y_{n,i})_{1 \leq i \leq q}$ de $y(t_{n,i})$:

$$y_{n,i} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \, f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

$\left((a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq i-1}} \text{ famille de réels} \right)$ et on définit enfin :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T \sum_{j=1}^{q} b_j \, f(t_{n,j}, y_{n,j})$$

$\left((b_i)_{1 \leq i \leq q} \text{ famille de réels} \right)$

On regroupe les 3 familles de coefficients qui caractérisent la méthode de Runge-Kutta sous la forme d'un tableau :

$$
\begin{array}{c|cccccc}
c_1 & 0 & & & & & \\
c_2 & a_{2,1} & 0 & & & & \\
\vdots & \vdots & & \ddots & & & \\
c_q & a_{q,1} & a_{q,2} & \cdots & a_{q,q-1} & 0 \\
\hline
1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{q-1} & b_q
\end{array}
$$

On peut établir une analogie entre les relations de définition de $y_{n,1}, \dots y_{n,q}$ et y_{n+1} et des méthodes de quadrature en écrivant les relations intégrales correspondantes :

Rappel : par Euler explicite

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_n, y_n)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta T \int_0^1 \underbrace{f(t_n + u\Delta T, y(t_n + u\Delta T))}_{y'(t_n + u\Delta T)} du$$

Ici, on peut écrire :

$$y(t_{n,i}) = y(t_n) + \Delta T \int_0^{c_i} f(t_n + u\Delta T, y(t_n + u\Delta T))\, du$$

$(1 \leq i \leq q)$

et

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta T \int_0^1 f(t_n + u\Delta T, y(t_n + u\Delta T))\, du$$

ce qui signifie qu'on utilise ici les méthodes de quadrature suivantes :

$$\int_0^{c_i} g(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\, g(c_j)$$

$1 \leq i \leq q$ $\quad (Q_1, Q_2, \dots Q_q)$

et

$$\int_0^1 g(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^{q} b_j\, g(c_j) \quad (Q_{q+1})$$

A présent, il suffit de déterminer les conditions sur les coefficients pour que ces méthodes soient

* consistantes
* stables
* convergentes
* d'ordre aussi élevé que possible

Auparavant, on définit la fonction Φ associée à la méthode (à un pas) :

$$\boxed{\begin{aligned} &\Phi(t, y, h) = \sum_{j=1}^{q} b_j\, f(t + c_j h, y_j) \\ &\text{où on a :} \\ &\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y + h\, a_{2,1}\, f(t, y_1) \\ \vdots \\ y_q = y + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{q,j}\, f(t + c_j h, y_j) \end{cases} \end{aligned}}$$

* Consistance d'une méthode du RK :

$$\Phi(t,y,0) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t,y_j) \text{ avec}$$

$$y_j = y, \text{ soit } \Phi(t,y,0) = \left(\sum_{j=1}^{q} b_j\right) f(t,y)$$

La CNS est donc :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{q} b_j = 1}$$

(à rapprocher avec la méthode de quadrature Q_{+1})

En général, cette condition est rajoutée sur les autres méthodes de quadrature :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} = c_i}$$

* Stabilité d'une méthode de RK :

$$|\Phi(t,z,h) - \Phi(t,y,h)| \leq \sum_{j=1}^{q} |b_j| L |y_j - z_j|$$

On montre ensuite (récurrence) que

$$|y_i - z_i| \leq (1 + (\alpha L h) + \dots + (\alpha L h)^{i-1}) |y-z|$$

où $\alpha = \max_{1 \leq i \leq q} \sum_{j=1}^{i-1} |a_{ij}|$

La méthode de RK est donc toujours stable avec un coefficient de Lipschitz pour Φ :

$$\Lambda = L \sum_{j=1}^{q} |b_j| (1 + (\alpha L h) + \dots + (\alpha L h)^{j-1})$$

* Remarque : afin que la constante ne soit pas trop grande, il est important d'avoir des coefficients $b_i \geq 0$. Dans ce cas :

$$\Lambda \leq L(1+(\alpha L \Delta T)+\dots+(\alpha L \Delta T)^{q-1})$$
$$= L\left(\frac{1-(\alpha L \Delta T)^q}{1-\alpha L \Delta T}\right)$$
$$\approx L$$

si $\Delta T \ll \frac{1}{\alpha L}$.

* Convergence d'une méthode de RK :

Les méthodes de RK sont convergentes dès que

$$\sum_{j=1}^{q} b_j = 1 \quad //$$

* Ordre d'une méthode de RK :

* ordre 1 : acquis avec la convergence (si f C^1)
* ordre 2 :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h) = \sum_{j=1}^{q} b_j \left(c_j \partial_t f(t+c_j h, y_j) + \frac{\partial y_j}{\partial h} \cdot \partial_y f(t+c_j h, y_j)\right)$$

où

$$\frac{\partial y_j}{\partial h} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i} f(t+c_i h, y_i) + h \sum_{i=1}^{j-1} a_{j,i} \left(c_k \partial_t f(\bullet) + \partial_y f(\bullet) \frac{\partial y_j}{\partial h}\right)$$

On évalue en $h=0$. Dans ce cas, $y_i = y$ $(1 \leq i \leq q)$. On a donc

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h)\Big|_{h=0} = \sum_{j=1}^{q} b_j \left[c_j \partial_t f(t,y) + \frac{\partial y_j}{\partial h}\Big|_{h=0} \partial_y f(t,y) \right]$$

avec

$$\frac{\partial y_j}{\partial h}\Big|_{h=0} = \sum_{i=1}^{j-1} a_{ji} f(t,y) + 0$$

$$= c_j f(t,y)$$

Au final

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h)\Big|_{h=0} = \sum_{j=1}^{q} b_j c_j \overbrace{\left[\partial_t f + f \partial_y f \right]}^{f^{[1]}}$$

La condition pour que la méthode soit d'ordre 2 est donc :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{q} b_j c_j = \frac{1}{2}}$$

Avec l'aide d'un ordinateur et d'un logiciel de type Maxima (ou Maple), on peut obtenir des conditions pour avoir des ordres supérieurs.

A présent, on construit des méthodes de Runge Kutta particulières d'ordre 2, puis 4 :

* ordre 2 : on choisit $q=2$:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline 1 & b_1 & b_2 \end{array} \qquad \alpha \in]0,1]$$

On doit avoir $b_1 + b_2 = 1$ et

$b_2 \alpha = \frac{1}{2}$, soit

$b_2 = \frac{1}{2\alpha}$ et $b_1 = 1 - \frac{1}{2\alpha}$

* Si $\alpha = 1$, on a la méthode suivante :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

← rectangle à gauche (ordre 0)

← trapèzes (ordre 1)

c'est à dire :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T \left[\frac{1}{2} f(t_n, y_n) + \frac{1}{2} f(t_{n+1}, y_{n,2}) \right]$$

où $y_{n,2} = y_n + \Delta T f(t_n, y_n)$

On parle de la méthode de Heun.

* Si $\alpha = \frac{1}{2}$, on a la méthode suivante :

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 \end{array}$$

← rectangle à gauche (ordre 0)

← point milieu (ordre 1)

c'est à dire :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T \, f\left(t_n + \frac{1}{2}\Delta T, \; y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_n, y_n)\right)$$

on parle de la méthode du point milieu.

* ordre 4 ; avec $q=4$, il existe une méthode de RK d'ordre 4 :

$$
\begin{array}{c|cccc}
0 & 0 & & & \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & & \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6}
\end{array}
$$

← R.G (ordre 0)
← R.D. (ordre 0)
← Pt milieu (ordre 1)
← Simpson (ordre 3)

soit
$$
\begin{cases}
y_{n,1} = y_n \\
y_{n,2} = y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_n, y_{n,1}) \\
y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_{n,2}, y_{n,2}) \\
y_{n,4} = y_n + \Delta T f(t_{n,3}, y_{n,3})
\end{cases}
$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}\Delta T\left[f(t_n, y_n) + 2f(t_{n,2}, y_{n,2}) + 2f(t_{n,3}, y_{n,3}) + f(t_{n,4}, y_{n,4})\right]$$

avec
$$
\begin{cases}
t_{n,1} = t_n \\
t_{n,2} = t_n + \frac{1}{2}\Delta T \\
t_{n,3} = t_{n,2} \\
t_{n,4} = t_n + \Delta T
\end{cases}
$$

* si $5 \leq q \leq 7$, il existe des méthodes de RK d'ordre $q-1$.

* si $q \geq 8$, il existe des méthodes de RK d'ordre $q-2$.

En pratique, c'est la méthode RK4 qui offre le meilleur compromis entre précision et simplicité //

Attention cependant aux aspects numériques de conditionnement pour ces méthodes explicites à un pas //

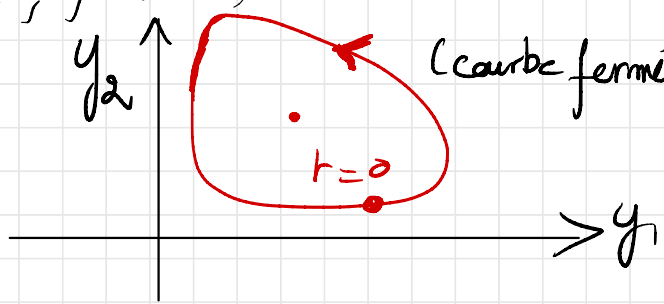
Implémentation (Scilab ou Python)

Exemple du modèle de Volterra :

proies
prédateurs

$$\begin{cases} y_1'(t) = a\,y_1(t) - b\,y_1(t)\,y_2(t) \\ y_2'(t) = -c\,y_2(t) + d\,y_1(t)\,y_2(t) \end{cases}$$

$(a, b, c, d > 0)$



(courbe fermée)

Autres situations usuelles :

→ Mouvement Terre/Soleil ou Terre/Lune/Soleil

→ Modèles avec ressort

→ Modèles d'épidémiologie dont SIR :

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha\, S(t)\, I(t) \\ I'(t) = \alpha\, S(t)\, I(t) - \beta\, I(t) \\ R'(t) = \beta\, I(t) \end{cases}$$

$(S + R + I = \text{cste})$

+ textes de modélisation

Exercices : TD 12

4 binômes :

	Texte	Passage
Meryeme, Elhacine	Systèmes hamiltonien	20/01
Yassine, Karam	Trafic routier	20/01

Textes :

→ dépollution d'un lac

→ pendule

→ encéphalopathie

+ 1 des 3 textes :

(trafic, globules, biogaz, hamilton)

→ Présentation : 2 textes dans 2 semaines
2 textes dans 3 semaines

Binômes	Texte	Passage
Anas, Imad	Dépollution d'un lac	27/01
Marouane, Mohamed	encéphalopathie	27/01