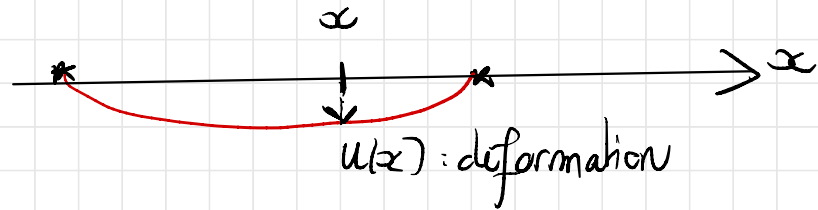
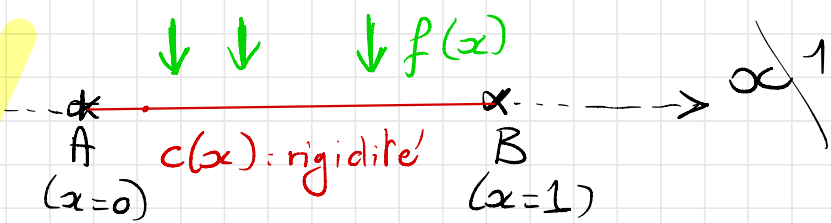


Séance 15 : exemple de résolution d'un problème aux limites

- 1) Modélisation du problème
- 2) Etude mathématique
- 3) Résolution approchée du problème
- 4) Implémentation et retour à la modélisation

1) Modélisation

On s'intéresse au problème de la déformation d'une poutre (corde, ...) fixée à ses extrémités :



Après écriture des relations de la mécanique des solides, on aboutit à l'équation suivante sur u :

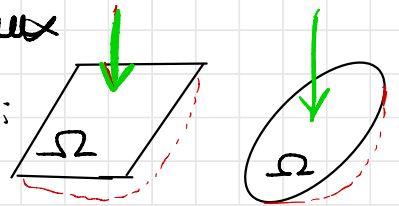
$$\begin{cases} (x \in]0,1[) \\ -u''(x) + c(x)u(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

(équation de Poisson avec conditions de Dirichlet)

Remarque : dans le cas de la modélisa-

-tion de la déformation d'une membrane,

on aboutit à la résolution d'une EDP (équation aux dérivées partielles):



2) Etude mathématique

On montre ici l'existence et l'unicité d'une solution au problème (1). On suppose dans toute la suite que $f \in \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ et

$c \in \mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ avec

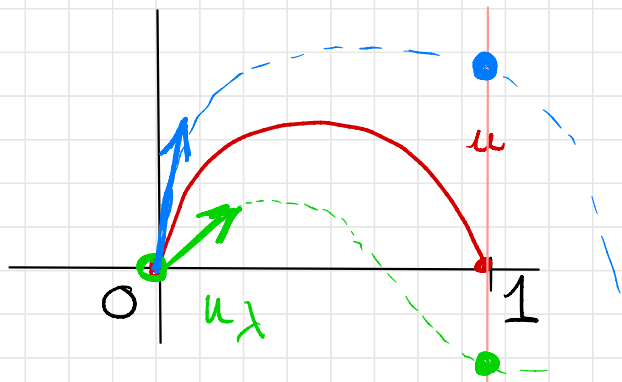
$$\forall x \in [0, 1], c(x) \geq 0.$$

L'idée consiste à étudier un problème de Cauchy en 0, paramétré par $\lambda = u'(0)$

et de montrer l'existence et l'unicité d'un paramètre λ tq $u_\lambda(1) = 0$

(méthode de bir)

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u(x) = f(x) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (x \in \Omega)$$



Soit le problème de Cauchy $(1)_\lambda$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -u''_\lambda(x) + c(x)u_\lambda(x) = f(x) \\ u_\lambda(0) = 0 \\ u'_\lambda(0) = \lambda \end{array} \right. \quad (x \in]0, 1[) \quad (1)_\lambda$$

$(\lambda \in \mathbb{R})$

Par tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le problème $(1)_\lambda$ / 3
admet une unique solution
 $u_\lambda \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ grâce au théorème
de Cauchy Lipschitz linéaire:

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} \\ \text{et } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \end{cases}$$

On étudie à présent la fonction

$$\Phi: \begin{pmatrix} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda \mapsto u_\lambda(1) \end{pmatrix}$$

On doit montrer qu'il existe un unique $\lambda \in \mathbb{R}$
tel que $\Phi(\lambda) = 0$

On montre que Φ_λ est affine en λ :
 en effet, en notant w_1 l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0 \\ w_1(0) = 0 \\ w_1'(0) = 1 \end{cases}$$

et w_2 l'unique solution du problème:

$$\begin{cases} -w_2''(x) + c(x)w_2(x) = f(x) \\ w_2(0) = 0 \\ w_2'(0) = 0 \end{cases}$$

on a

$$u_\lambda = \lambda w_1 + w_2 \text{ (par unicité)}$$

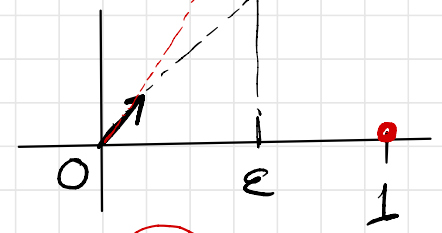
de Cauchy Lipschitz).

Cela implique que

$$\Phi(\lambda) = \lambda w_1(1) + w_2(1)$$

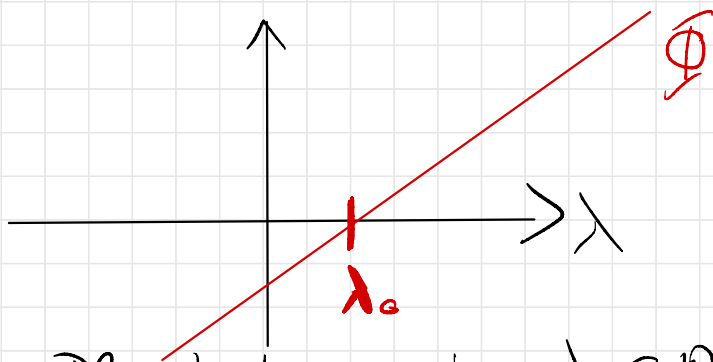
Il reste donc à montrer que $w_1(1) \neq 0$

En effet, on suppose par l'absurde que $w_1(1) = 0$. Comme



$w_1'' = c w_1$ et $w_1 > 0$ sur $]0, \epsilon[$,
 w_1 est convexe sur $]0, \epsilon[$, $w_1'(x) \geq 1$

sur $]0, \epsilon[$, on a donc $w_1(x) \geq x$ sur $]0, \epsilon[$. On ne peut donc avoir $w_1(1) = 0$



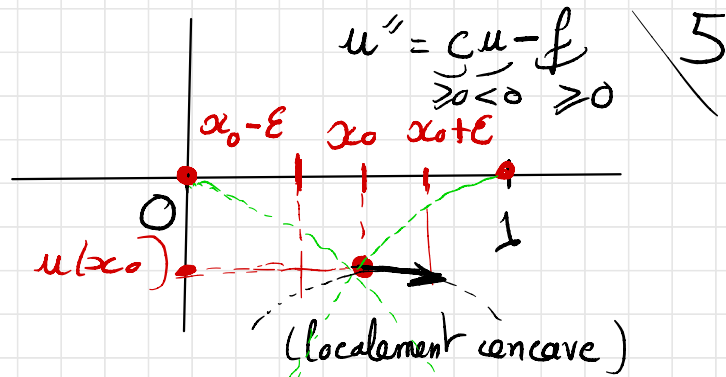
Il existe donc un unique $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{\Phi}(\lambda_0) = 0$ soit $u(1) = 0$.

Le problème (1) admet donc une unique solution. De plus,

si $f \geq 0$, alors $u \geq 0$

(principe du maximum).

En effet, on suppose par l'absurde qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que $u(\alpha) < 0$



Localement, autour de α_0 , on a u concave (et u' décroissante). En étendant cette propriété, on ne peut assurer simultanément que $u(0) = 0$ et $u(1) = 1$.

3) Résolution approchée du problème

Une première idée consiste à rechercher λ_0 tq $\underline{\Phi}(\lambda_0) = 0$ (par dichotomie par exemple) puis à approcher le problème de Cauchy (1) $_{\lambda_0}$ avec une méthode à un pas (Euler, Runge-Kutta, ...)

→ Implementation (Scilab)

Exemple avec $c(x) = 1$

$$f(x) = (\pi^2 + 1) \sin(\pi x)$$

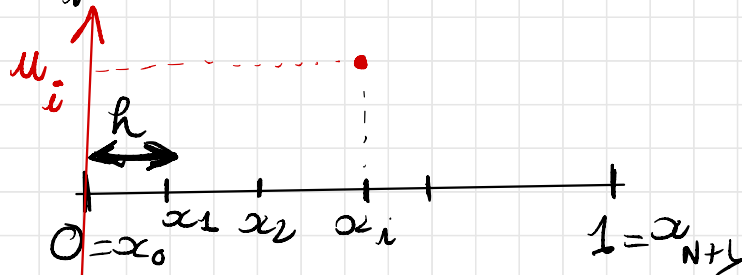
$$\Rightarrow u(x) = \sin(\pi x) \text{ (solution exacte)}$$

Cette approche est cependant peu précise, coûteuse, et non adaptée en dimension ≥ 1 .

On présente ici une nouvelle méthode, appelée méthode des différences finies:

On discrétise tout d'abord le domaine de définition : on choisit $N+2$ points régulièrement distribués ($h = \frac{1}{N+1}$):

$$x_i = 0 + i h \quad (0 \leq i \leq N+1)$$



On note u_i , une valeur approchée de $u(x_i)$.

On montre (avec Taylor) que

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + O(h^2)$$

si $u \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$ (exercice)

Au vu de ce résultat, on propose

le schéma de construction suivant par

les valeurs u_0, u_1, \dots, u_{N+1} :

$$\begin{cases} \frac{-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}}{h^2} = c_i u_i + f_i & (1 \leq i \leq N) \\ u_0 = 0 \text{ et } u_{N+1} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

où $c_i = c(x_i)$ et $f_i = f(x_i)$.

Il s'agit d'un système de N équations à N inconnues qui s'écrit matriciellement:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & 0 & & \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & & \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & -\frac{1}{h^2} & \\ & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{U} + \begin{pmatrix} c_1 & & & & \\ & c_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & c_N & \\ & & & & c_N \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

où $\mathbf{U} = (u_1, \dots, u_N)$

On reconnaît la matrice de Laplaceau discrétisé :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

dont on sait qu'elle est définie positive.

Ainsi $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ est défini de manière unique

$$\left(\frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix} \right) \gg 0$$

On peut également montrer un principe du maximum discret, à savoir :

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \geq 0 \quad (\text{ie } u_i \geq 0 \forall i) \quad \Bigg\} 8$$

si $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix} \geq 0$.

(exercice : on montre que $\frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & \\ & c_N \end{pmatrix}$ est une M-matrice).

Implémentation (Sulab)

(très bonne précision) même par de petites valeurs de N .

On démontre à présent la convergence de

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ vers $\begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix}$ avec également une estimation d'erreur quand $N \rightarrow +\infty$.

La démonstration reprend les principes de consistance et de stabilité, utilisés par la convergence des méthodes à un pas :

→ la consistance est assurée avec l'approximation de Taylor de $u''(x_i)$

→ la stabilité se démontre en majorant une norme bien choisie de l'inverse de

$$M = \frac{1}{h^2} A + \begin{pmatrix} c_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N \end{pmatrix}$$

On peut montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\|M^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1}{8}$$

(exercice : voir page du cours)

On utilise pour cela :

→ la formule donnant $\|M\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} (\sum_{j=1}^N |M_{ij}|)$

→ le principe du maximum discret par M

→ le vecteur $V = {}^t (v(x_1), \dots, v(x_N))$

où $v(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$ est solution de

$$\begin{cases} -v'' = 1 \\ v(0) = v(1) = 0 \end{cases}$$

En admettant ce résultat, on a :

$$\begin{cases} MU = F \text{ et} \\ \text{et} \\ M \begin{pmatrix} u(x_1) \\ \vdots \\ u(x_N) \end{pmatrix} = F + \underbrace{O(h^2)}_{\Delta_h \text{ (error de consistance)}} \end{cases}$$

où u est la solution de (1).

On a donc en soustrayant et en inversant le système :

$$U - U_{ex} = M^{-1}(\Delta_h)$$

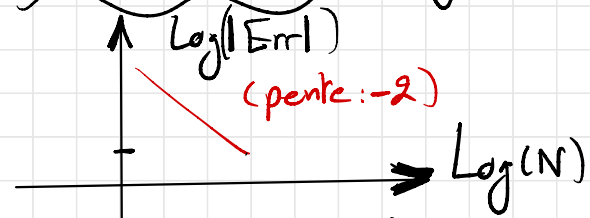
En prenant la norme, il vient :

$$\|U - U_{ex}\|_{\infty} \leq \|M^{-1}\| \|\Delta_h\| \leq Ch^2$$

On a donc : 10
 $\text{Max } |u(x_i) - u_i| \leq Kh^2$
 $0 \leq i \leq N+1$
 La méthode est donc convergente et d'ordre 2.

4) Implémentation et retour à la modélisation

Implémentation et vérification de l'ordre.



- * Test sur des exemples généraux
- * Changement des conditions aux limites