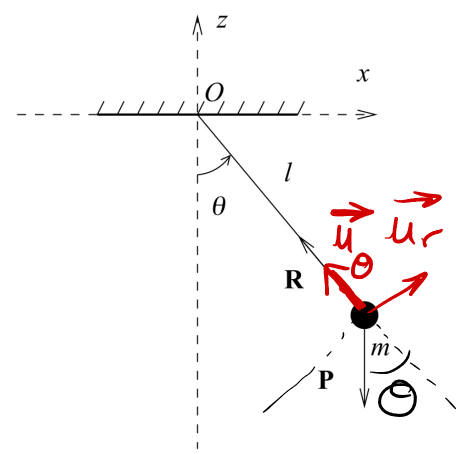
Séance 16 : quelques exemples de modélisation classiques en lien avec les EDO

1) Le pendule pesant



* **Mise en équations :**

Principe fondamental de la dynamique

$$m\vec{\Gamma} = m\vec{g} + \vec{R}$$

On projette cette relation dans le repère de Frenet $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$

* sur $\vec{u_r}$:

$$\boxed{m l \ddot{\theta} = -mg\sin\theta + 0}$$

soit

$$\dot{\overbrace{\begin{pmatrix}\theta \\ \dot{\theta}\end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix}\dot{\theta} \\ -\frac{g}{l}\sin\theta\end{pmatrix}$$

Avec des conditions initiales sur θ et $\dot{\theta}$ on obtient un problème de Cauchy bien posé.

* Ce système possède des propriétés supplémentaires :

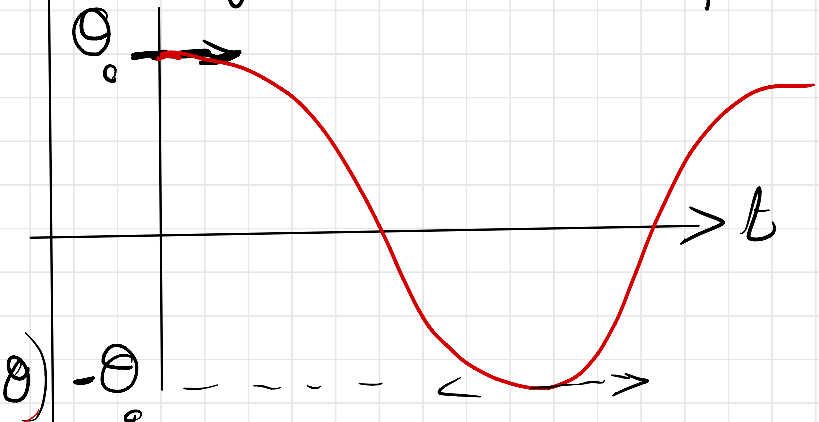
→ Il est Hamiltonien (voir texte). En particulier, la quantité

$$H(p,\theta) = \underbrace{\frac{1}{2ml^2}p^2}_{E_{cin}} + \underbrace{mlg(1-\cos\theta)}_{E_{pot}}$$

est préservée

$$(p = ml^2\dot{\theta})$$

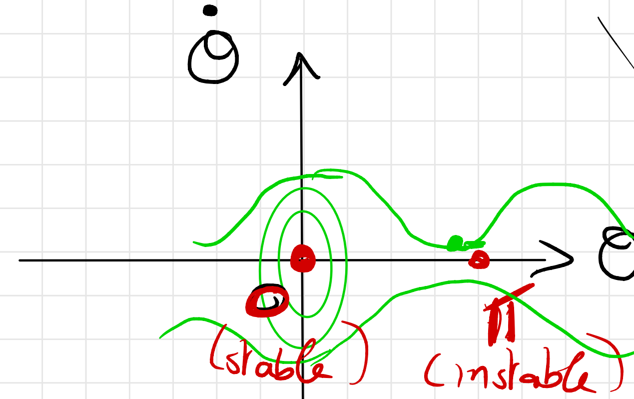
→ Pour le pendule lâché avec une vitesse nulle, et $\theta(0) = \theta_0 \in]0,\pi[$ les trajectoires sont périodiques.



→ En tant que système dynamique, le pendule possède 2 états d'équilibre (modulo 2π) :

* $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$: point d'équilibre stable mais non asymptotiquement stable (le linéarisé autour de $(0,0)$ possède 2 valeurs propres imaginaires pures)

* $(\theta, \dot{\theta}) = (\pi, 0)$: point d'équilibre instable (valeurs propres réelles de signe opposé : pt selle)



* texte (pendule) perturbation de la stabilité de l'état d'équilibre $(0,0)$ par une longueur $l(t)$ variable)

* 2 variantes à ce modèle

→ pendule linéarisé autour de $(0,0)$: petites oscillations ($\sin\theta \approx \theta \Rightarrow ml\ddot{\theta} = -mg\theta$)
(un seul état d'équilibre stable)

→ pendule avec frottement :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - k\dot{\theta}.$$

(un seul état d'équilibre, (0,0) asymptotiquement stable).

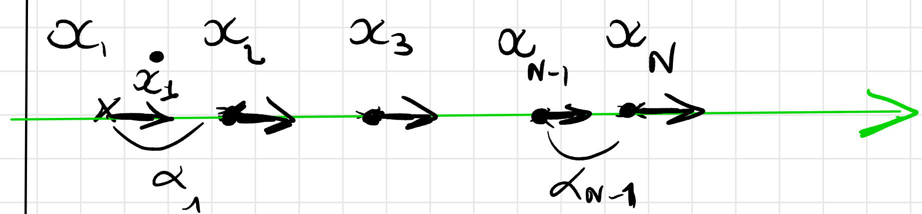
→ Résolution approchée

* Méthodes usuelles (Euler, Runge-Kutta)
* Méthodes symplectiques (Verlet)

→ Méthodes à un pas, d'ordre 1

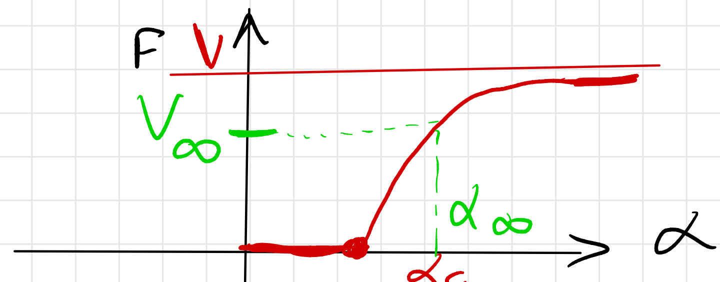
→ Méthodes qui préservent davantage les invariants physiques (Hamiltonien)

2) Trafic routier



Le conducteur adapte sa vitesse $\dot{x}_n$ par rapport à sa distance au conducteur qui le précède :

$$\dot{x}_n(t) = V F(\alpha_n)$$



Texte → Existence d'un état d'équilibre lorsque les véhicules se déplacent à une vitesse fixée $V_\infty < V$: dans ce cas, ils se séparent d'une distance fixée α_∞ telle que

$$V_\infty = V F(\alpha_\infty)$$

Texte → Éventuelle remontée d'information dans une situation proche de cet équilibre : après linéarisation autour de l'équilibre (α_∞, V_∞), et passage à une modélisation continue), il existe une valeur critique α_0, en deçà de laquelle, l'information d'un ralentissement à l'avant se propage vers l'arrière.