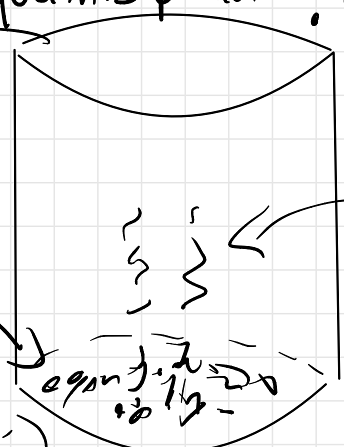
Séance 17 : un exemple de texte de modélisation : le réacteur biologique

I Modélisation d'un réacteur biologique

quelle quantité produite ? (milieu fermé)

micro organisme



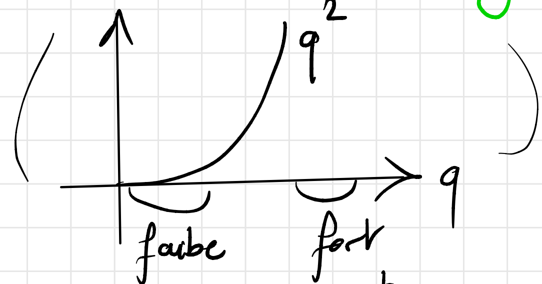
$q(t)$ (quantité)

biogaz ($CH_4 + CO_2$)

$\Big(c_1 \underbrace{\int_0^t q(\sigma)\,d\sigma}_{Q(t)}\Big)$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \underbrace{a\,q(t) - b\,q^2(t)}_{\text{croissance logistique}} - \underbrace{\overbrace{c_2 c_1}^{c}\,Q(t)}_{\text{toxicité du gaz produit}}$$

croissance exp. $\quad$ surpopulation



où $Q(t) = \int_0^t q(\sigma)\,d\sigma$.

avec une condition initiale $q(0) > 0$

$\Longrightarrow$ équation intégro-différentielle

On adimensionalise ce système :

$$(3)\begin{cases} K\, u'(s) = u(s) - u^2(s) - u(s)\int_0^s u(\sigma)\,d\sigma \\ u(0) > 0 \end{cases}$$

avec $K = \frac{c}{ab}$ et $u(0) = b\,q(0)/a$.

II) 1ère étude qualitative

→ existence et unicité de solutions à partir de l'expression implicite :

$$u(s) = u_0 \exp\left(\frac{1}{K}\int_0^s \left(1 - u(\sigma) - \int_0^\sigma u(\xi)\,d\xi\right)d\sigma\right)$$

(à vérifier directement)

On en déduit la positivité de u (si $u_0 > 0$) sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : l'existence et l'unicité de u sur $\mathbb{R}_+$ peut aussi se montrer avec la 2ème expression

II) Expression sous forme de système différentiel

On pose $y(s) = \int_0^s u(\sigma)\,d\sigma$

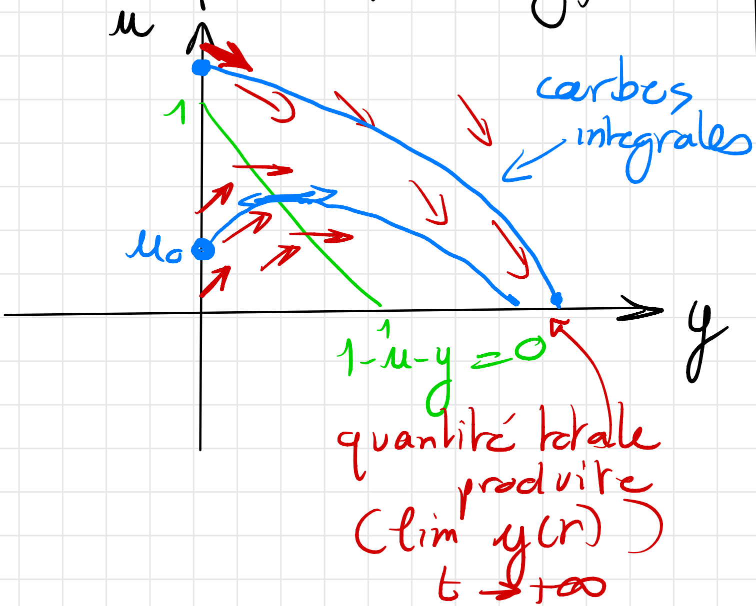
On a le système équivalent

(biogaz)

(micro organisme)

$$\begin{cases} y' = u \\ u' = \frac{u}{K}(1 - u - y) \end{cases}$$

On procède à une étude qualitative dans le plan de phase (y, u)



On montre que $0 \leq u \leq u_{max}$

Cela implique que $0 \leq y \leq y_{max}$

en utilisant la relation entre u et y :

$$u = (1 + K - y) - (1 + K - u_0)\, e^{-y/K}$$

(à vérifier à partir du système d'ED)

En particulier, la quantité totale de biogaz produite est finie :

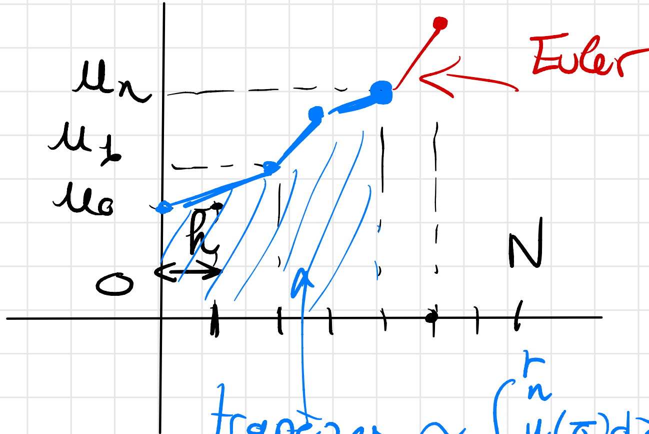
$$Q = \int_0^{+\infty} q(t)\, dt < +\infty$$

III] Simulation numérique

→ avec le système d'ED : Euler, Runge-Kutta

→ avec l'équation intégro-différentielle :

Euler explicite + trapèzes



trapèzes $\approx \int_0^{r_n} u(\sigma)\,d\sigma$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{S}_0 = 0 \\ \tilde{S}_n = \tilde{S}_{n-1} + \frac{h}{2}\left(u_{n-1} + u_n\right) \\ u_{n+1} = u_n + h\left(\frac{u_n}{K}\left(1 - u_n - \tilde{S}_n\right)\right) \end{cases}$$

→ Implémentation (Python, Scilab)

Comparaison des 2 approches

Calcul de quantité totale produite