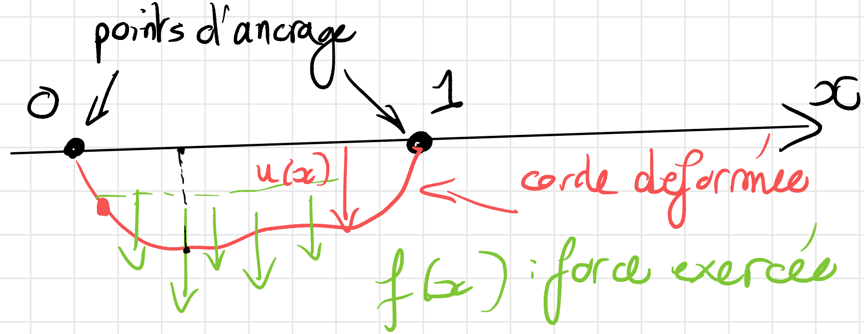
Séance 19 : modélisation de la déformation d'une corde. Position optimale d'un poids sur cette corde

* Référence : texte public B2015-3
  (voir aussi séance 15)
* Thèmes : * EDO (ou EDP)
  * Optimisation
* Objectifs :
  → calculer la déformation d'une corde soumise à une force extérieure
  → déterminer la position optimale d'un poids sur cette corde afin de minimiser son risque de rupture

1

I) Modélisation de la corde



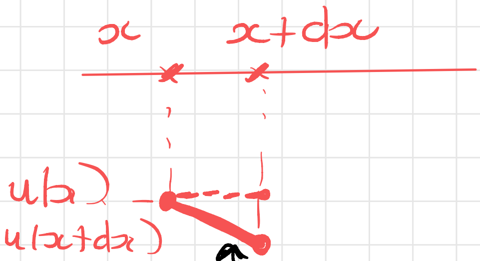
Energie du système "corde"

→ energie d'étirement

→ énergie due à la force exercée

(gravité négligée)

* Énergie d'étirement :



$$\xi_1(x) = k(x)\left(\sqrt{(u(x+dx)-u(x))^2+(dx)^2} - dx\right)$$

(coefficient de raideur en x, variable ou constant)

→ en intégrant

$$E_{\text{étirement},1} = \int_0^1 \xi_1(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 k(x)\left(\sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}(x)^2+1}-1\right)dx$$

* Énergie due à la force exercée

$$E_{force} = -\int_0^1 \underbrace{f(x)\,u(x)}_{\text{travail en } x}\,dx$$

On cherche à minimiser

$$E^{(u)} = E_{\text{étirement}} + E_{force}$$

$$\underset{\text{Taylor ordre 1}}{\approx} \frac{1}{2}\int_0^1 k(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,u(x)\,dx$$

* On rajoute les conditions aux limites

$u(0) = u(1) = 0$

par exprimer la fixation de la corde à ses extrémités.

On admet (Th 1) qu'il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ tq $u(0) = u(1) = 0$ telle que

$\forall v \in V, \ E(u) \leq E(v)$ où

$V = \{ v \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}), v(0) = v(1) = 0 \}$

* Corollaire : la solution u vérifie

$$(1) \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(k(x) \dfrac{\partial u}{\partial x}(x) \right) = f(x), x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(à démontrer)

Remarque : si k est constant, on a

$$\begin{cases} -k \Delta u = f, x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

* Modélisation du risque de rupture :

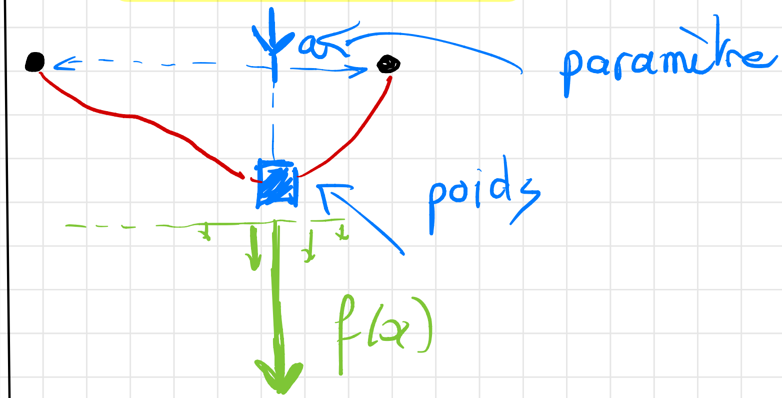
On admet que

$$\begin{cases} F(0) = k(0)\dfrac{\partial u}{\partial x}(0) \\ F(1) = k(1)\dfrac{\partial u}{\partial x}(1) \end{cases}$$

Le risque de rupture s'écrit :

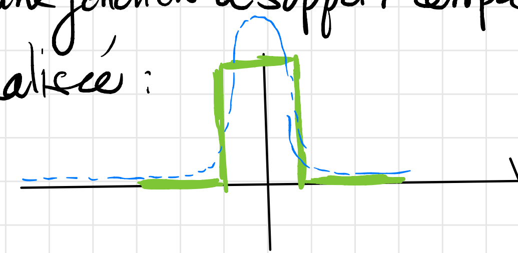
$$\boxed{R(u) = \frac{1}{2}\left|k(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|k(1)\frac{\partial u}{\partial x}(1)\right|^2}$$

II] Optimisation de la position d'une charge



$f(x) = p(x-a)$ où

p est une fonction à support compact, ou très localisée :



La question consiste à déterminer la meilleure valeur de a par minimiser le risque de rupture.

a : paramètre $\in \,]0,1[$

$\downarrow$

risque de rupture

$R(u^a)$

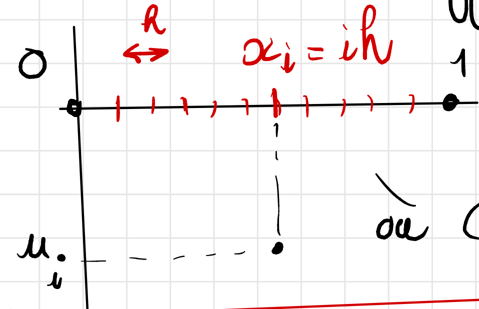
solution de l'ED (1) avec second membre :

$f^a(x) = p(x-a)$

III) Discrétisation du problème

3.1) Résolution numérique de la déformation de la corde

→ Méthode des différences finies



$h = \frac{1}{N+1}$

où $(u_i)_{0 \le i \le N+1}$ tq :

$u_0 = u_{N+1} = 0$ et :

$$-\frac{1}{h}\left(k_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{u_{i+1}-u_i}{h}\right) - k_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{u_i-u_{i-1}}{h}\right)\right) = f_i$$

où

$$\begin{cases} k_{i+\frac12} = k\left(\left(i+\frac12\right)h\right) \\ k_{i-\frac12} = k\left(\left(i-\frac12\right)h\right) \\ f_i = f(x_i) \end{cases}$$

On prend par exemple :

* $\boxed{f(x) = p(x-a)}$ avec

a : fixe quelconque (par exemple $a = 0{,}3$)

$$\boxed{p(x) = \lambda e^{-(\lambda x)^2}}$$

où λ : grand (par exemple $\lambda = 20$)

* $\underline{k(x) = 1 + 0{,}8\sin(10x)\cos(5x)}$

$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ est solution du système linéaire :

$$\boxed{MU = F} \text{ où}$$

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & * & & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & * \\ 0 & & * & m_{N,N} \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ implémentation : Scilab / Python

3.2) Calcul numérique du critère de rupture

On calcule numériquement le critère de rupture pour une valeur de a donnée :

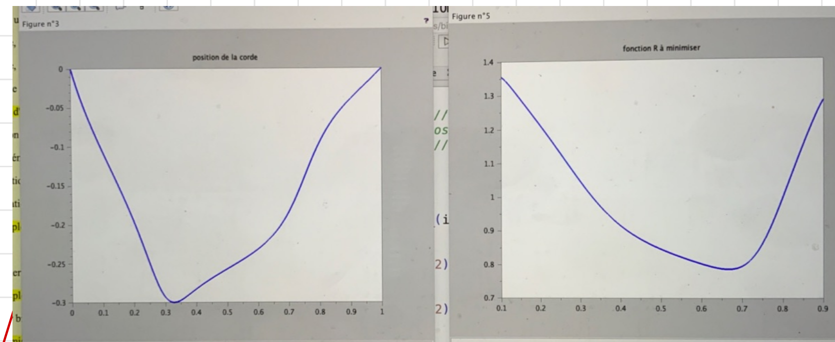
$$R(u^a) \simeq \overbrace{\frac{1}{2} k_{\frac{1}{2}}^2 \frac{u_1^2}{h^2} + \frac{1}{2} k_{N+\frac{1}{2}}^2 \frac{u_N^2}{h^2}}^{R_N(a)}$$

où $\begin{cases} k_{\frac{1}{2}} = k\left(\frac{1}{2} h\right) \\ k_{N+\frac{1}{2}} = k\left(\left(N+\frac{1}{2}\right) h\right) \end{cases}$

On peut représenter la fonction

$$\begin{array}{ccc} [0.1,\ 0.9] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longrightarrow & R_N(a) \end{array}$$

(balayage de points entre 0.1 et 0.9)



(Corde si $a = 0,3$) $\quad$ ($a \mapsto R_N(a)$)

3.3) Recherche du minimum du critère de rupture

Pour appliquer un algorithme de gradient, on doit d'abord calculer

$$a \mapsto R_N'(a).$$

On a :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial a} R_N(a) = \frac{1}{2} k_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{h^2}\right) 2 u_1^a \left(\frac{\partial u_1^a}{\partial a}\right) + \frac{1}{2} k_{N+\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{h^2}\right) 2 u_N^a \left(\frac{\partial u_N^a}{\partial a}\right)}$$

L'équation (1) étant linéaire en a, $\frac{\partial u^a}{\partial a}$ solution de

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u^a}{\partial a}\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial a}$$

et avec la même discrétisation)

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^a}{\partial a} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_N^a}{\partial a} \end{pmatrix}$$

est solution de

$$M\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right) = \frac{\partial F^a}{\partial a} = -\begin{pmatrix} p'(x_1 - a) \\ \vdots \\ p'(x_N - a) \end{pmatrix}$$

L'algorithme de gradient s'écrit :

$$\boxed{\begin{cases} a_0 = 0,5 \\ a_{k+1} = a_k - \underbrace{\rho}_{\text{pas du gradient}} R_N'(a_k) \end{cases}}$$

On s'arrête lorsque $|R_N'(a)| < 10^{-6}$

3.4) Illustrations informatiques :

→ sur l'exemple, $a \simeq 0{,}666$ est la position optimale où placer le poids afin de réduire le risque de rupture

→ Cas tension k = cste :

* $a \mapsto R_N(a)$ est quadratique (à démontrer) et son minimum se trouve en $a = 0{,}5$

→ sensibilité de la méthode du gradient au point initial (a_0) et au pas de descente (ρ)

→ alternatives à la méthode de gradient : "dichotomie" (sans gradient) ou dichotomie sur $R_N'(a)$, ordre 2 (Newton) avec le calcul de $R_N''(a)$ (lourd à calculer).

Référence

* F. Hubert, J. Hubbard (2 tomes)