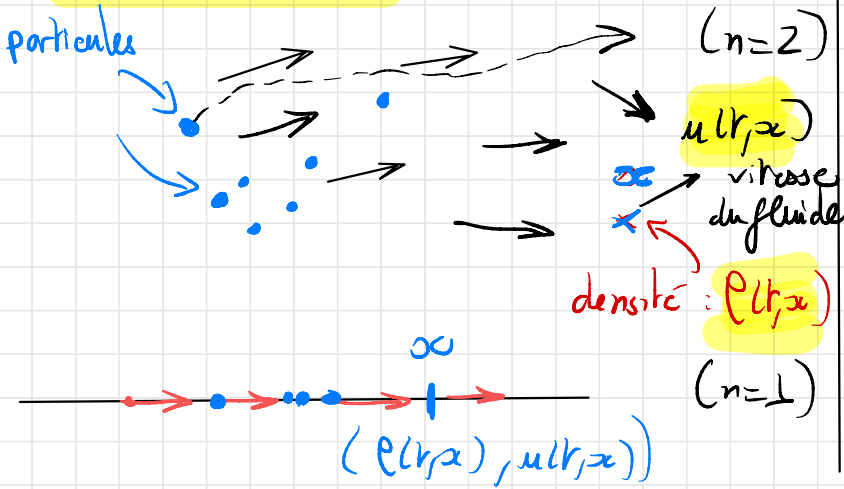


# Séance 20: transport de particules dans un fluide

Mots clés: équations aux dérivées partielles  
schémas aux différences finies

## I) Contexte



Exemple: transport de polluant dans l'atmosphère<sup>1</sup>

Approche lagrangienne: on suit une particule dans le fluide et on calcule sa trajectoire ( $\equiv$  EDO)

Approche eulérienne: on se place en un point  $x$  et on étudie l'évolution de la densité des particules. ( $x \in \mathbb{R}^n$ )

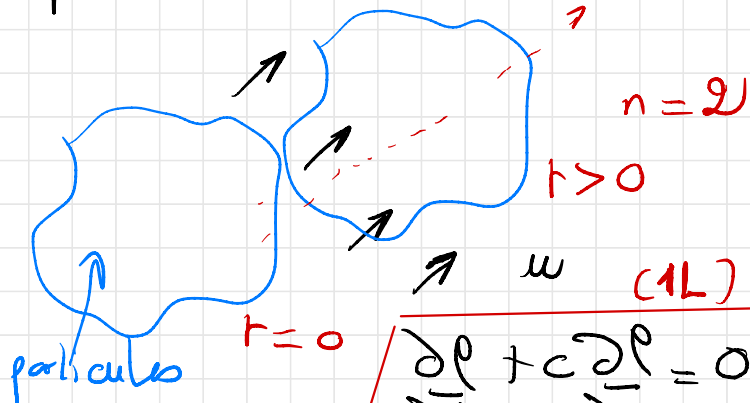
$$(\equiv \text{EDP}): \frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho(t, x) u(t, x))}{\partial x} = 0$$

2 cas particuliers vont être étudiés

$$\text{par } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

1<sup>er</sup> cas : modèle linéaire ( $f(p) = cp$ )

$u(t, x) = c$  : transport de particules à vitesse constante.



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (1L)$$

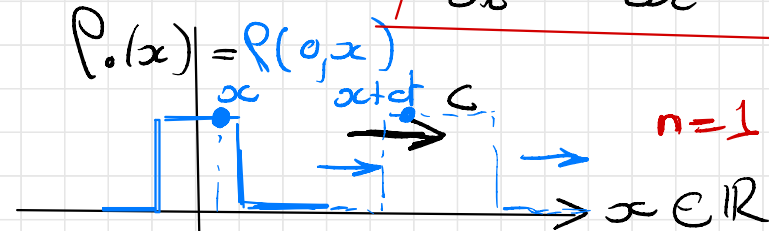
2<sup>ème</sup> cas : modèle non linéaire

$u(t, x) = \rho(t, x)$  : la vitesse du fluide est liée à la densité des particules:

$$\frac{\partial \rho(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial (c \rho^2(t, x))}{\partial x} = 0 \quad (1B)$$

(équations de Burgers, qu'on rencontre aussi dans des modèles de trafic routier : voir texte étudié).

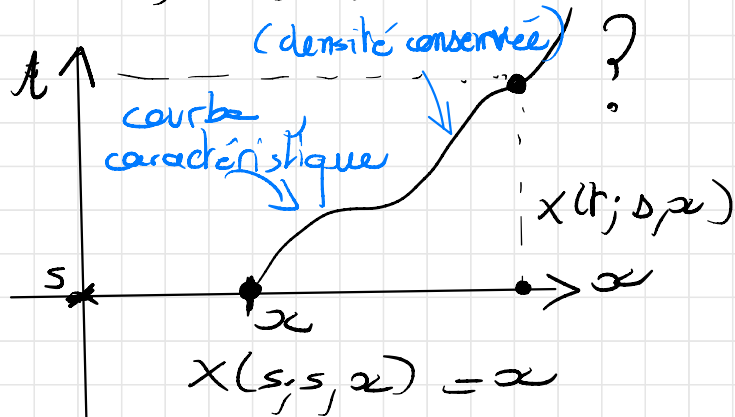
→ Apparition de chocs ( $\equiv$  discontinuités de  $x \mapsto \rho(t, x)$ ) même par des données initiales très régulières (voir § suivants)



On a :  $\rho(t, x) = \rho_0(x - ct)$

## II) Etude mathématique

On cherche à étudier les trajectoires de particules dans le fluide, dans le cas (1L) ou (1B):



$t \mapsto X(t; s, \alpha)$  vérifie l'EDO

$$\frac{dX(t; s, \alpha)}{dt} = f'(t, X(t; s, \alpha))$$

On a en effet dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} \rho(t, X(t, s)) = \frac{\partial}{\partial t} \rho(t, X(t, s))$$

$$+ \frac{d}{dt} X(t, s) \frac{\partial}{\partial x} \rho(t, X(t, s))$$

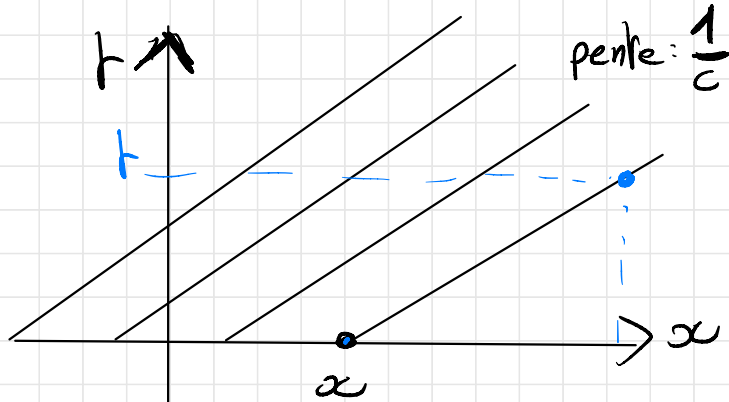
$$= \frac{\partial \rho}{\partial t}(\cdot, \cdot) + f'(t, \cdot) \frac{\partial \rho}{\partial x}(\cdot, \cdot)$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho) = 0$$

1<sup>er</sup> cas:  $f(\rho) = c\rho$  :

$$\frac{dX}{dt} = c \leadsto X(t, s, \alpha) = \alpha + c(t-s)$$

Les courbes caractéristiques sont  
des droites :



On en déduit

$$\rho(t, X(t, s)) = \text{cte} = \rho(s, X(s, s)) \\ = \rho(s, x)$$

soit

$$\rho(t, x + c(t-s)) = \rho(s, x)$$

Pour  $s=0$ :

$$\rho(t, x + ct) = \rho(0, x) = \rho_0(x)$$

$$\text{soit : } \rho(t, x) = \rho_0(x - ct)$$

2<sup>ème</sup> cas :  $f(\rho) = \rho^2$  (Burgers)

l'équation des courbes caractéristiques

devient :

$$\frac{dX(t; s, x)}{dt} = 2\rho(t, X(t; s, x))$$

Or on sait aussi :  $\frac{d\rho(t, X(t; s, x))}{dt} = 0$

On en déduit que  $\frac{dX(t; s, x)}{dt} = \text{cte} = \rho(s, X(s; s, x))$



Pour étudier numériquement les solutions de (1), on va remplacer (1) par une EDP approchée ayant un terme de régularisation :

$$\frac{\partial}{\partial t} p_\varepsilon(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(p_\varepsilon(t, x)) = \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x^2} p_\varepsilon(t, x)$$

(2)

terme régularisant

On montre (non demandé) :

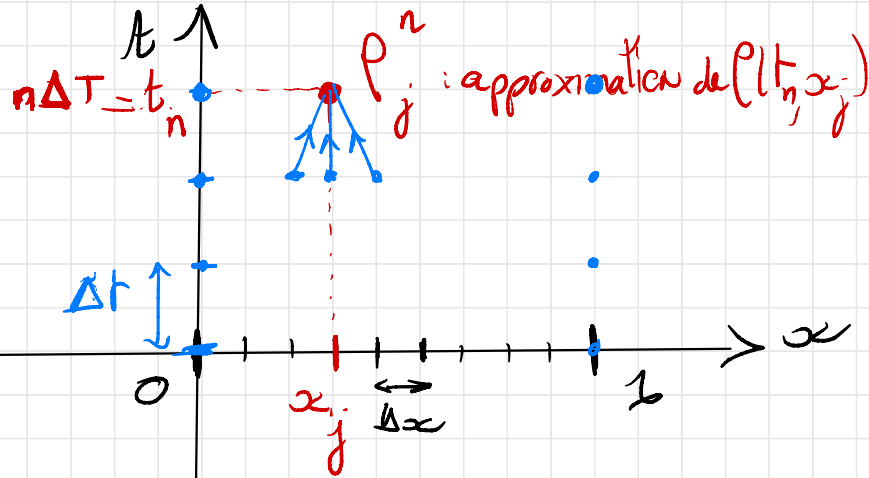
- $p_\varepsilon$  est définie et régulière  $\forall t, \forall x$
- $p_\varepsilon \rightarrow p$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$

### 3) Simulation numérique / 6

On construit un schéma aux différences finies par (1) ou (2). Cela consiste à se donner :

→ un pas d'espace :  $\Delta x$

→ un pas de temps :  $\Delta t$



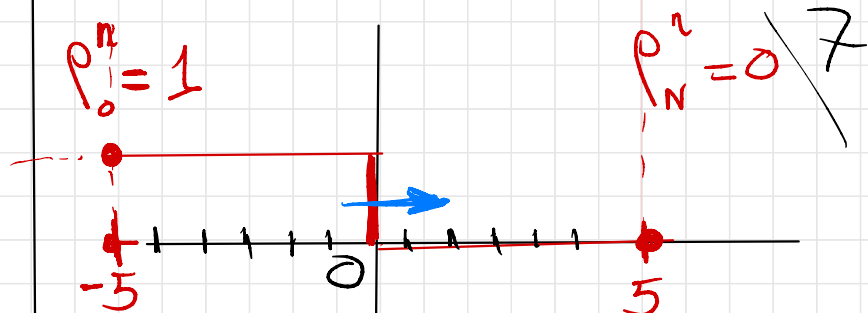
On propose le 1<sup>er</sup> schéma suivant  
par l'EDP

$$(1) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f(\rho)}{\partial x} = 0 :$$

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{f(\rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n)}{2\Delta x} = 0$$

$$(j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N})$$

\* Numériquement, on traite le cas  
linéaire :  $f(\rho) = c\rho$  et une donnée  
initiale de type "escalier" :



$$c = 1, \Delta x = \frac{(5+5)}{N}, \Delta t = \frac{1}{1000}$$

( $N = 100$ )

$\rightarrow (n \geq 0)$

$$\rho_j^{n+1} = \rho_j^n - \Delta t \left( \frac{\rho_{j+1}^n - \rho_{j-1}^n}{2\Delta x} \right)$$

$1 \leq j \leq N-1$  (pts intérieurs)

$$\rho_0^n = 1, \rho_N^n = 0 \quad \forall n$$

$\Rightarrow$  échec (fortes oscillations)

A présent, on n'approche plus (1) mais l'EDP (2) avec une valeur petite de  $\varepsilon$ , en l'occurrence  $\varepsilon = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$  (supposé petit)

$$(2) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (f(\rho))}{\partial x} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}$$

On utilise un schéma aux différences finies de même nature :

$$\frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\Delta t} + \frac{f(\rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n)}{\Delta x} =$$

$$\dots = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \left( \frac{\rho_{j+1}^n - 2\rho_j^n + \rho_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right)$$

soit :

$$\rho_j^{n+1} = \frac{\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n}{2} - \Delta t \frac{f(\rho_{j+1}^n) - f(\rho_{j-1}^n)}{2\Delta x}$$

\* Numériquement, on implémente le nouveau schéma dans le cas général ( $f$  quelconque) et une donnée initiale régulière :

$$\rho(x) = \exp(-10x^2)$$

$$x \in [-1, 1]$$





On doit imposer

$$|c \frac{\Delta T}{\Delta x}| \leq 1$$

par que le schéma soit stable.

→ conditions aux limites périodiques  
(voir texte).

9