

Séance 21 : équation de la chaleur et méthodes des éléments finis

I Modélisation de la conductivité thermique dans un matériau soumis à une source de chaleur

Binômes

Anas, Imad

Marciane Mohamed

Texte

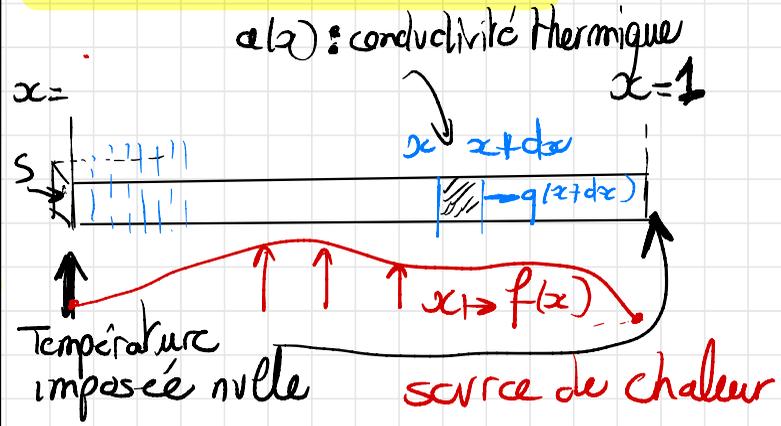
Dépollution d'un lac

encéphalopathie

Passage

14/04

14/04



q : flux de chaleur :

$$\int_x^{x+dx} f(x) S dx = S(q(x+dx) - q(x))$$

variation du flux de chaleur

Or, on a (loi de Fourier)

$$q(x) = -a(x) \frac{du(x)}{dx}$$

conductivité thermique Température

Avec la 1^{re} relation, on a :

$$\frac{dq(x)}{dx} = f(x) \text{ soit :}$$

$$- \frac{d}{dx} \left(a(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x) \quad (1)$$

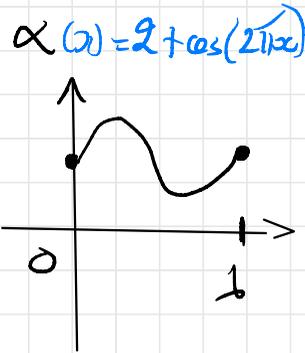
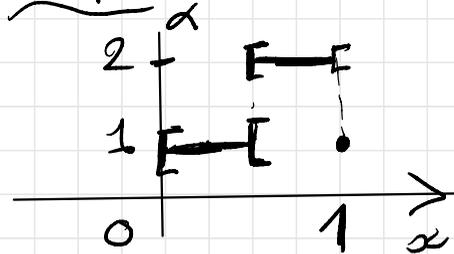
$$\text{avec } u(0) = u(1) = 0 \quad (2)$$

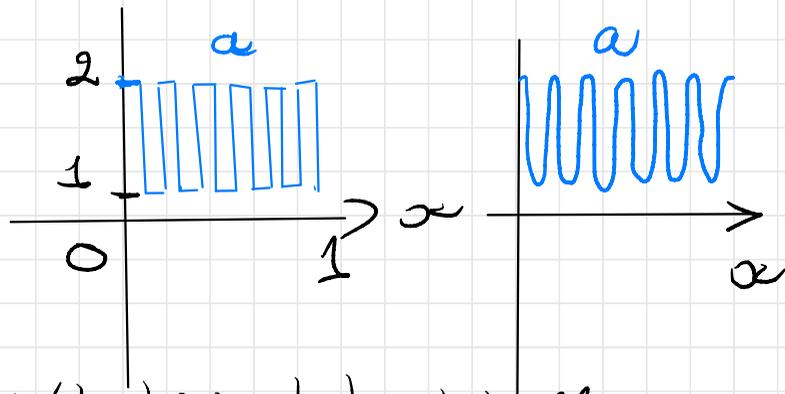
2
On suppose en outre que le matériau est du type composite, c'est à dire que sa conductivité thermique varie rapidement en espace :

$$a(x) = \alpha(nx) \quad \text{où}$$

$$\alpha : ([0,1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*) \text{ est 1-périodique.}$$
$$\alpha : x \mapsto \alpha(x)$$

Exemples :





L'objectif de ce texte est double :

→ Trouver le comportement asymptotique de $n \mapsto u_n(x)$ solution de (1)-(2)

→ Vérifier numériquement, avec la méthode des éléments finis, le comportement attendu (résonance ?)

2) Etude mathématique et comportement asymptotique

3

→ Hypothèses sur a et f :

* $a \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$
 * $0 < a_* \leq a(x) \leq a^*$, $\forall x \in [0,1]$.

→ Sous ces hypothèses, il existe une unique solution de (1)-(2), donnée par la formule (4).

(voir aussi : séance EDO, texte corde)

→ on suppose que $0 < a_* \leq \alpha \leq a^*$ et on note (u_n) la solution de (1)-(2)

correspondant à $a_n(x) = \alpha(nx)$.

Grâce à (4), (u_n) et (u_n') sont bornées uniformément sur $(\mathcal{E}(\Sigma_0, 1), \mathbb{R})$, $\|\cdot\|_\infty$.

Par le théorème d'Ascoli, il existe $u \in \mathcal{E}(\Sigma_0, 1), \mathbb{R}$ telle que

$u_{n_k} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} u$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

On se demande alors quelle est l'équation satisfaite par u .

(homogénéisation).

Pour cela, on introduit la notion de convergence faible:

$u_n \rightharpoonup u$ si et seulement si $\forall \varphi \in \mathcal{C}^0_c(]0, 1[, \mathbb{R})$ (continue, à support compact)

$\int_0^1 u_n(x) \varphi(x) dx \rightarrow \int_0^1 u(x) \varphi(x) dx$

Exemple: $a_n \rightharpoonup \bar{a} = \int_0^1 \alpha(x) dx$
où $a_n(x) = \alpha(nx)$ (Th 2) à faire

* $-\frac{d}{dx} (a_n \frac{du_n}{dx}) = f$ (1)
 \downarrow \bar{a} \downarrow $\frac{du}{dx}$ (Th 4: IPP)

Le problème est qu'on ne peut conclure à ce stade

sur la convergence faible (ou forte) des produits $a_n \cdot \frac{du_n}{dx}$.

On revient à l'équation (1) :

$$w_n(x) = a_n(x) \frac{du_n(x)}{dx}$$

vérifie le critère d'Ascoli : il existe une sous suite

$$w_{n_k} \rightharpoonup w \quad \|\cdot\|_\infty$$

$$\Rightarrow u_{n_k}'(x) = \frac{1}{a_n} w_{n_k}$$

5

Il vient donc :

$$u_{n_k}' \rightarrow \left(\int_0^1 \frac{dy}{a(y)} \right) \cdot w = u' \quad (*)$$

on en déduit $u(x) = \int_0^x \left(\int_c^1 \frac{dy}{a(y)} \right) w(z) dz$

Il vient à partir de :

$$\frac{dw_{n_k}}{dx} = -f(x)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx} \left(a_{\text{eff}} \frac{du}{dx} \right) \text{ avec } (*)$$

On en déduit que u vérifie
l'équation :

$$-\frac{d}{dx} \left(a_{\text{eff}} \frac{d}{dx} u \right) = f$$

avec $a_{\text{eff}} = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{\alpha(y)} dy}$

(et non $\int_0^1 \alpha(y) dy$!)

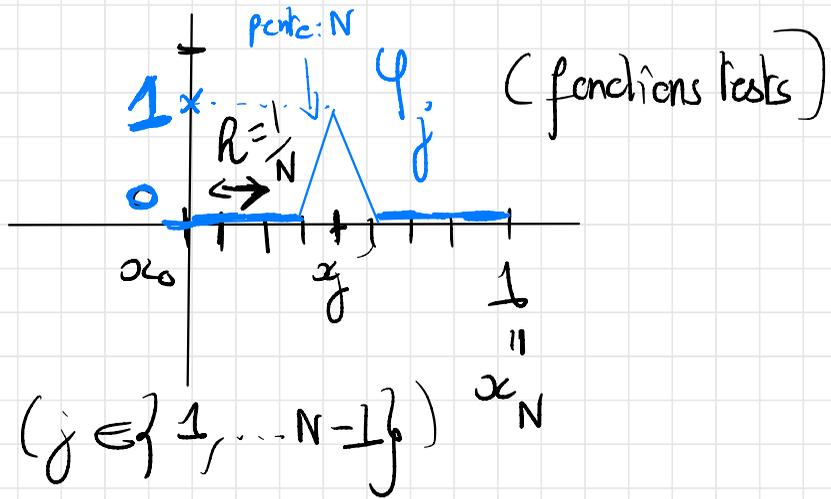
3) Etude numérique du problème

On construit une méthode reposant
sur la formulation faible de l'équation
(1) :

$$\int_0^1 \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \left(\frac{d}{dx} \psi(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \psi(x) dx$$

où $\psi \in \mathcal{C}_0([0,1], \mathbb{R})$ ($\psi(0) = \psi(1) = 0$)

On écrit cette relation par des
fonctions ψ particulières et par
une fonction u , combinaison linéaire
de ces fonctions test :



On recherche

$$u^{(N)}(x) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i \varphi_i(x)$$

tel que $\forall j \in \{1, \dots, N\}$

$$\int_0^1 a(x) \frac{du^{(N)}(x)}{dx} \frac{d\varphi_j(x)}{dx} dx = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$$

On a $u^{(N)} \in V^{(N)}$ où

$$V^{(N)} = \left\{ \varphi \in \mathcal{C}_0([0, 1], \mathbb{R}), \varphi|_{I_j} \in \mathcal{P}_1 \right\}$$

($\dim V^{(N)} = n-1$
 et $\{\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}\}$ base de $V^{(N)}$)

Les inconnues $U = (u_i)_{1 \leq i \leq N-1}$ sont solutions d'un système linéaire:

$$AU = F \text{ où}$$

$$A_{ij} = \int_0^1 a(x) \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) dx$$

$$F_i = \int_0^1 f(x) \varphi_i(x) dx$$

* On montre la convergence de la méthode (via le Th 5):

$$\|u^{(N)} - u\|_{\infty} \leq \frac{C}{N}$$

* Sur le cas présent, A est une matrice tridiagonale car les supports de φ_i' et φ_j' sont disjoints si $|i-j| \geq 2$

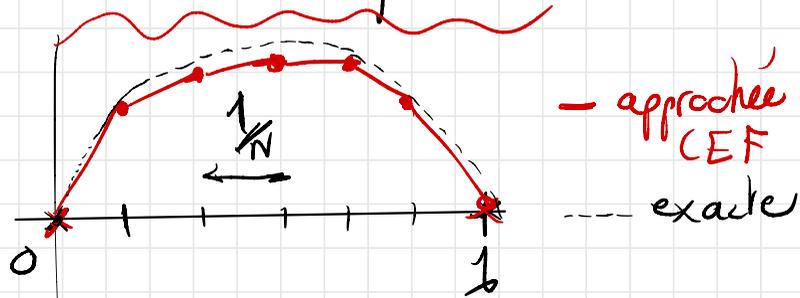
On a

$$\begin{cases} A_{ii} = N^2 \int_{(i-1)/N}^{(i+1)/N} a(x) dx & 1 \leq i \leq N-1 \\ A_{i,i+1} = -N^2 \int_{i/N}^{(i+1)/N} a(x) dx \\ A_{i+1,i} = A_{i,i+1} \end{cases}$$

Implementation Python/Salab: 8

1^{er} exemple (validation E.F.)

* $a(x) = 1$ et $f(x) = 1$ ($N=6$)



$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} u(x) \right) = 1$$

→ solution exacte: $u(x) = \frac{1}{2} x(1-x)$
 2^{ème} exemple (resonance d convergence asymptotique: n, N, \dots)

→ L'exemple 1 donne la même matrice
que par la méthode des différences
finies !

→ L'exemple 2 est plus délicat
numériquement lorsque n est grand.
Le phénomène de résonance avec N
se produit très souvent.

Le résultat théorique de convergence
est difficile à observer //