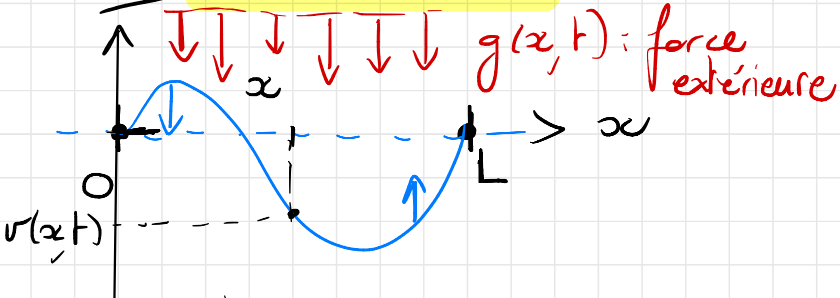
Séance 22 : vibrations d'une corde

Sous titre : peut-on entendre la forme d'un tambour ?

I) Modélisation



On admet (principe fondamental de la dynamique) que v vérifie l'EDP :

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = g(x)\cos(\omega t) & (x \in]0,L[,\ t>0) \\
* \ v(0,t) = v(L,t) = 0 & \text{(corde fixée) (Dirichlet)} \\
* \ v(x,0) = 0 & \text{(corde au repos initialement)} \\
* \ \dfrac{\partial}{\partial t} v(x,0) = 0 & \text{(corde lâchée initialement)}
\end{cases}
\qquad (1)
$$

avec $g \in L^2(]0,L[)$ et $\omega > 0$.

On admet qu'il existe une unique solution v au système (1).

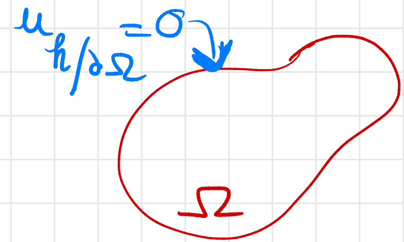
II) Etude des modes propres de l'équation des ondes

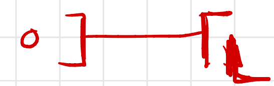
Les résultats ci dessous sont vus par $\Omega =]0,L[$ mais peuvent être étendus par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

On cherche à déterminer les valeurs propres et les modes propres de l'opérateur "$-$Laplacien" avec conditions aux limites de Dirichlet.
On détermine ensuite un lien avec les solutions de (1).

λ_k est une valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec conditions de Dirichlet sur Ω, associé à un mode propre $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$, non nul, si on a :

$$\begin{cases} -\Delta u_k = \lambda_k u_k & x \in]0,L[\\ u_k(0) = u(L) = 0 \end{cases}$$

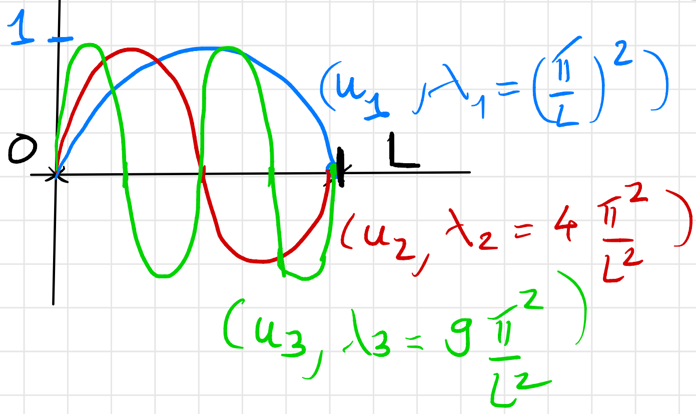




* Si $\Omega =]0,L[$, $\left(\omega_k = \frac{k\pi}{2L}\right)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$

$$\begin{cases} \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \\ u_k(x) = A \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right) \end{cases}$$

$(\|u_k\| = 1 \Rightarrow A = \sqrt{2})$



On admet que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ forme une base Hilbertienne de $L^2(]0,1[)$. (vrai pour Ω général).

* Lien avec les solutions de (1) :

On décompose $g \in L^2$, dans la base $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$: $\langle g, u_k \rangle$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} g_k u_k(x)$$

On cherche la solution de (1) sous la forme :

$$\boxed{v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) u_k(x)}$$

On a donc la relation suivante par les fonctions y_k :

$$\sum_k y_k''(t) u_k(x) + \sum_k y_k(t) \lambda_k u_k(x)$$
$$= \cos(\omega t) \sum g_k u_k(x)$$

soit : $y_k''(t) + \lambda_k y_k(t) = \cos(\omega t) g_k$

qu'on résout avec les C.I. :

$$y_k(0) = y_k'(0) = 0$$

On obtient, après calculs, une expression explicite de y_k en fonction de λ_k, ω, g_k, t.

Dans le cas où $\Omega =]0, L[$, on admet que l'approximation de v à partir de ses K premiers modes :

$$v_K(x,t) = \sum_{k=1}^{K} y_k(t)\, u_k(x)$$

donne une erreur majorée par :

$$\boxed{\sup_{t \geq 0} \| v(x,t) - v_K(x,t) \|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C}{K^{m+2}}}$$

(où m est tel que
$$\sum_k \lambda_k^m |g_k|^2 < +\infty$$
)

$\Rightarrow$ 1ère méthode d'approximation de v

III Etude numérique de l'équation des ondes

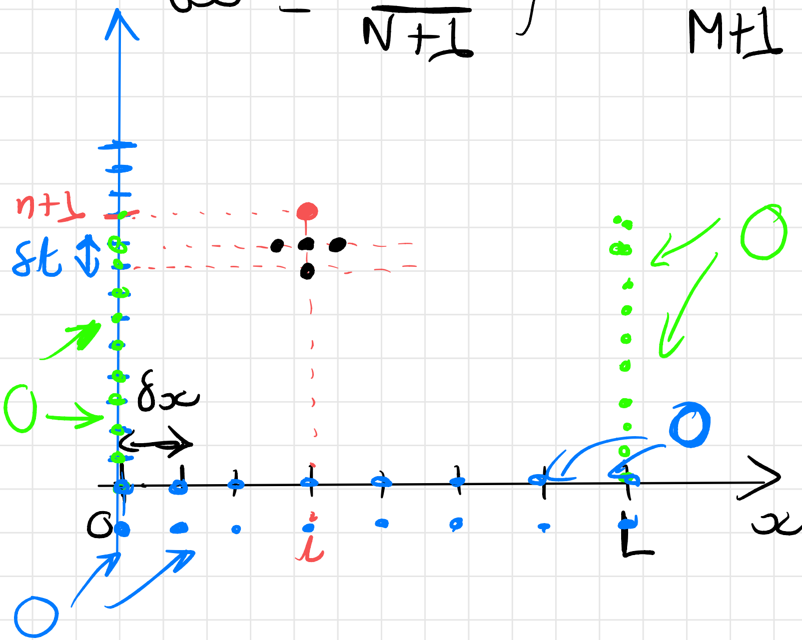
On propose d'utiliser un schéma de type différences finies, en temps et en espace : on note v_i^n une approxi-

-mation de $v(x_i, t_n)$

avec $x_i = i\,\delta x \quad (1 \le i \le N)$

$t_n = n\,\delta t \quad (0 \le n \le M)$

où $\delta x = \dfrac{L}{N+1}$, $\delta t = \dfrac{T}{M+1}$



On propose le schéma : $(n \geq 1)$

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\dfrac{v_i^{n+1} - 2v_i^n + v_i^{n-1}}{(\delta t)^2} - \dfrac{v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n}{(\delta x)^2} = f_i^n & \\
v_0^n = v_{N+1}^n = 0 & \text{(Dirichlet)} \\
v_i^0 = 0, \quad 0 \le i \le N+1 & \text{(repos initial)} \\
v_i^{-1} = 0, \quad 0 \le i \le N+1 & \text{(corde lachée)}
\end{array}
\right.
$$

Illustration numérique sur l'exemple du texte :

$$\begin{cases} * \ g(x) = \mathbb{1}_{[a,b]}(x), \text{ on a} \\ * \ \omega = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

$$g_k = \langle g, u_k \rangle \quad (L=1)$$

$$= \int_a^b \sqrt{2}\sin(k\pi x)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k\pi}\Big[-\cos(k\pi x)\Big]_a^b$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{k\pi}\big(\cos(k\pi a) - \cos(k\pi b)\big)$$

On résout :

$$y_k''(t) + (k\pi)^2 y_k(t) = g_k \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

On a :

$$y_k(t) = y_H(t) + y_p(t)$$

$$= A\cos(k\pi t) + B\sin(k\pi t) + y_p(t)$$

avec la solution particulière :

$$y_p(t) = \frac{g_k}{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + (k\pi)^2}\cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$$

On trouve $B = 0$ et $A = -\dfrac{g_k}{-\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 + (k\pi)^2}$

* Comparaison des 2 approches sur l'exemple du texte :

→ la méthode "spectrale" donne une très bonne approximation, dès que le nombre de modes ≥ 3.

→ la méthode D.F. est moins précise sur l'exemple. Elle converge cependant aussi vers la solution exacte en $O((\delta t)^2 + (\delta x)^2)$.

Cependant, il faut respecter un critère de stabilité : $\frac{\delta t}{\delta x} \leq \frac{1}{2}$.

IV) Formule de Weyl

On s'intéresse à la répartition des valeurs propre de l'opérateur $-\Delta$:

$$\mathcal{N}(\lambda) = \text{card}\{k \text{ tq } \lambda_k \leq \lambda\}$$

Par exemple, si $\Omega =]0,1[$, sachant que $\lambda_k = (k\pi)^2$

on a $\mathcal{N}(\lambda) = E\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right)$

De manière générale, on montre que

$$\boxed{\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{mes}(\Omega)\,\text{mes}(B_d)}{(2\pi)^d}\lambda^{d/2} \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^d)}$$

On peut vérifier l'exactitude de cet équivalent :

→ si $\Omega =]0,1[$: $E\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\right) \sim \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}$

→ si $\Omega \;]0,a[\times]0,b[$

$$N(\lambda) \sim \frac{ab}{(2\pi)^2}\pi\lambda = \frac{\lambda ab}{4\pi}$$

(à vérifier numériquement)

(→ "entendre la forme d'un tambour")

* La dernière question soulevée par le texte, consiste à retrouver la formule de Weyl, à partir du Laplacien discrétisé :

$$A_h u_h = \lambda_h u_h$$

où

$$A_h = \begin{pmatrix} 2/h^2 & -1/h^2 & & 0 \\ -1/h^2 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (N)$$

Si on utilise la méthode de la puissance pour trouver une approximation de la plus grande des valeurs propres de A_h, notée λ_h^*, on peut penser

$$N(\lambda_h^*) \simeq N.$$